# Контрольная работа
# Вариант №0

**Задача 1.** Найти предел последовательности: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+3)!+(n+2)!}{(n+3)!-(n+2)!}$.

**Задача 2.** Найти предел функции: $\lim\limits_{x\to-8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$.

**Задача 3.** Найти предел функции: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x\cdot sinx}-1}{e^{x^2}-1}$.

**Задача 4.** Найти точки разрыва функции и указать их тип: $y=\dfrac{2x-3}{\log_2|x|}$.

**Задача 5.** Найти производную функции: $y=\dfrac{x-\sin x}{x\cdot 5^x}$.

**Задача 6.** Найти производную функции: $y=cos\,ln(3x^2-2)$.

**Задача 7.** Найти производную функции: $y=(x^3-x^2+3x+7)^{x^2-9x+1}$.

**Задача 8.** Найти производную $\frac{dy}{dx}$ функции, заданной неявно:

$$xy - lny = 3.$$

**Задача 9.** Найти общее выражение для производной порядка $n$ от функции : $y = ln(3x - 2)$.

**Задача 10.** Продифференцировать функцию:

$$y = \left[ tg\left(cos^3 \frac{x^2}{3}\right) \cdot \sqrt[4]{arcctg \frac{3x}{7}} \right]^{arccos\, x^7}.$$

**Задача 1.** Найти предел последовательности: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+3)!+(n+2)!}{(n+3)!-(n+2)!}$.

$$\boxed{n! = n\cdot(n-1)\cdots 2\cdot 1}$$

Что бы избавиться от неопределенности, необходимо числитель и знаменатель разделить на слагаемое $(n+3)!$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+3)!+(n+2)!}{(n+3)!-(n+2)!}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n+3)!+(n+2)!}{(n+3)!}}{\dfrac{(n+3)!-(n+2)!}{(n+3)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n+3)!}{(n+3)!}+\dfrac{(n+2)!}{(n+3)!}}{\dfrac{(n+3)!}{(n+3)!}-\dfrac{(n+2)!}{(n+3)!}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\overbrace{\dfrac{1}{(n+3)}}^{0}}{1-\underbrace{\dfrac{1}{(n+3)}}_{0}}=1.$$

$$\frac{(n+2)!}{(n+3)!}=\frac{(n+2)\cdot(n+1)\cdot n\cdot(n-1)\cdots 2\cdot 1}{(n+3)\cdot(n+2)\cdot(n+1)\cdot n\cdot(n-1)\cdots 2\cdot 1}=\frac{1}{(n+3)}$$

**Задача 2.** Найти предел функции: $\lim\limits_{x\to-8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$.

Что бы избавиться от неопределенности, необходимо числитель и знаменатель умножить и разделить на соответствующие сопряженные

$$\lim_{x\to-8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to-8}\frac{(\sqrt{1-x}-3)}{(2+\sqrt[3]{x})}\cdot\frac{(\sqrt{1-x}+3)}{(\sqrt{1-x}+3)}\cdot\frac{(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}=$$

$$\lim_{x\to-8}\frac{(1-x-9)}{(8+x)}\cdot\frac{\left(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}{\left(\sqrt{1-x}+3\right)}=\lim_{x\to-8}\frac{-(8+x)}{(8+x)}\cdot\frac{\left(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}{\left(\sqrt{1-x}+3\right)}=$$

$$\lim_{x\to-8}-\frac{\left(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}{\left(\sqrt{1-x}+3\right)}=-\frac{12}{6}=-2.$$

**Задача 3.** Найти предел функции: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\cdot sinx}-1}{e^{x^2}-1}$.

Что бы избавиться от неопределенности, необходимо умножить и разделить на соответствующее сопряженное и воспользоваться эквивалентными функциями:

$$\boxed{\sin x \sim x \qquad\qquad e^x-1\sim x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\cdot sinx}-1}{e^{x^2}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x\cdot sinx}-1)}{e^{x^2}-1}\cdot\frac{(\sqrt{1+x\cdot sinx}+1)}{(\sqrt{1+x\cdot sinx}+1)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x\cdot sin\,x-1)}{(e^{x^2}-1)(\sqrt{1+x\cdot sinx}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot sin\,x}{(e^{x^2}-1)(\sqrt{1+x\cdot sinx}+1)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot x}{x^2(\sqrt{1+x\cdot sinx}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(\sqrt{1+x\cdot sinx}+1)}=\frac{1}{2}$$

0

**Задача 4.** Найти точки разрыва функции и указать их тип: $\boldsymbol{y} = \dfrac{\boldsymbol{2x-3}}{\log_2|\boldsymbol{x}|}$.

Точками разрыва будут значения $\boldsymbol{x_1 = 0}$ ( не существует функция $y = \log_2|\boldsymbol{x}|$ ) и $\boldsymbol{x_{2,3} = \pm 1}$ (знаменатель становится равным 0).

$\boldsymbol{x_1 = 0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x-3}{\log_2|x|} = \frac{-3}{-\infty} = \mathbf{0}.$$

$\boldsymbol{x_2 = -1}$

$$\lim_{x\to -1-0}\frac{2x-3}{\log_2|x|} = \frac{-5}{+0} = -\infty.$$

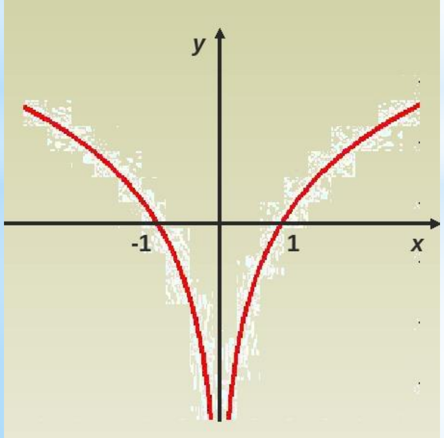
$$\lim_{x\to -1+0}\frac{2x-3}{\log_2|x|} = \frac{-5}{-0} = +\infty.$$

$\boldsymbol{x_3 = 1}$

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{2x-3}{\log_2|x|} = \frac{-1}{-0} = +\infty.$$

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{2x-3}{\log_2|x|} = \frac{-1}{+0} = -\infty.$$

$\boldsymbol{x_1}$ – устранимый разрыв.



$y = \log_2|x|$

$\boldsymbol{x_{2,3}}$ – разрыв II рода.

**Задача 5.** Найти производную функции: $y = \frac{x - \sin x}{x \cdot 5^x}$.

Для поиска производной надо воспользоваться правилами дифференцирования:

$$(uv)' = u'v + uv' \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$\left(\frac{x - \sin x}{x \cdot 5^x}\right)' = \frac{(x - \sin x)' x \cdot 5^x - (x - \sin x)(x \cdot 5^x)'}{(x \cdot 5^x)^2} =$$

$$= \frac{(1 - \cos x) x \cdot 5^x - (x - \sin x)(5^x + x5^x \ln 5)}{(x \cdot 5^x)^2}$$

**Задача 6.** Найти производную функции: $\boldsymbol{y = cos\, ln(3x^2 - 2)}$.

Для поиска производной надо воспользоваться правилом дифференцирования сложной функции:

$$\boxed{F'(x) = (f(g(x)))' = f'_g \cdot g'_x}$$

$$y' = (cos\, ln(3x^2 - 2))' = -sin\, ln\left(3x^2 - 2\right) \cdot \frac{1}{3x^2 - 2} \cdot 6x.$$

**Задача 7.** Найти производную функции: $\boldsymbol{y = (x^3 - x^2 + 3x + 7)^{x^2-9x+1}}$.

Для поиска производной вида $\boldsymbol{f(x)^{g(x)}}$ надо воспользоваться логарифмическим дифференцированием:

$$y = (x^3 - x^2 + 3x + 7)^{x^2-9x+1}$$

$$\ln y = \ln (x^3 - x^2 + 3x + 7)^{x^2-9x+1}$$

$$\ln y = (x^2 - 9x + 1)\ln (x^3 - x^2 + 3x + 7)$$

$$\frac{y'}{y} = (2x - 9)\ln\left(x^3 - x^2 + 3x + 7\right) + (x^2 - 9x + 1) \cdot \frac{3x^2 - 2x + 3}{x^3 - x^2 + 3x + 7}$$

$$y' = y\left[(2x - 9)\ln\left(x^3 - x^2 + 3x + 7\right) + (x^2 - 9x + 1) \cdot \frac{3x^2 - 2x + 3}{x^3 - x^2 + 3x + 7}\right]$$

$$y' = (x^3 - x^2 + 3x + 7)^{x^2-9x+1} \times$$

$$\times\left[(2x - 9)\ln\left(x^3 - x^2 + 3x + 7\right) + (x^2 - 9x + 1) \cdot \frac{3x^2 - 2x + 3}{x^3 - x^2 + 3x + 7}\right]$$

**Задача 8.** Найти производную $\frac{dy}{dx}$ функции, заданной неявно: $\boldsymbol{xy - lny = 3}$.

Для поиска производной от функции, заданной неявно, используются правила дифференцирования считая $\boldsymbol{y}(x)$ сложной функцией:

$$\boldsymbol{xy - lny = 3}$$

$$\boldsymbol{y + xy' - \frac{y'}{y} = 0}$$

$$\boldsymbol{\left(x - \frac{1}{y}\right)y' = -y}$$

$$\boldsymbol{\left(\frac{xy-1}{y}\right)y' = -y}$$

$$\boldsymbol{y' = -\frac{y^2}{xy-1} = \frac{y^2}{1-xy}}$$

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{1-xy}}$$

**Задача 9.** Найти общее выражение для производной порядка $\boldsymbol{n}$ от функции : $\boldsymbol{y = ln(3x-2)}$.

$$y' = \frac{3}{3x-2}$$

$$y'' = -\frac{3^2}{(3x-2)^2}$$

$$y''' = \frac{3^3}{(3x-2)^3}$$

$$y^{IV} = -\frac{3^4}{(3x-2)^4}$$

$$y^{V} = \frac{3^5}{(3x-2)^5}$$

…………………………….

$$y^{n} = (-1)^{n+1}\frac{3^n}{(3x-2)^n}$$

**Задача 10.** Продифференцировать функцию:

$$y = \left[ tg\left(cos^3 \frac{x^2}{3}\right) \cdot \sqrt[4]{arcctg \frac{3x}{7}} \right]^{arccos\, x^7}.$$

Обозначим:

$$u(x) = tg\left(cos^3 \frac{x^2}{3}\right); \qquad v(x) = \sqrt[4]{arcctg \frac{3x}{7}}; \qquad w(x) = arccos\, x^7.$$

Найдем производные сложных функций:

$$u' = \frac{1}{cos^2\left(cos^3 \frac{x^2}{3}\right)} \cdot \left(3cos^2 \frac{x^2}{3}\right) \cdot sin \frac{x^2}{3} \cdot \frac{2x}{3};$$

$$v' = \left(arcctg \frac{3x}{7}\right)^{-\frac{3}{4}} \cdot \frac{-1}{1 + \left(\frac{3x}{7}\right)^2} \cdot \frac{3}{7}; \qquad w' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^{14}}} \cdot 7x^6.$$

Функция $\boldsymbol{y}(x)$ примет вид: $\boldsymbol{y = [u \cdot v]^{w}}$

Для поиска производной $\boldsymbol{y}(x)$ надо воспользоваться логарифмическим дифференцированием:

$$\boldsymbol{y = [u \cdot v]^{w}}$$

$$\boldsymbol{ln\, y = ln\, [u \cdot v]^{w}}$$

$$\boldsymbol{ln\, y = w \cdot ln[u \cdot v] = w \cdot (\ln u + \ln v)}$$

$$\boldsymbol{\frac{y'}{y} = w' \cdot ln[u \cdot v] + w \cdot \left(\frac{u'}{u} + \frac{v'}{v}\right)}$$

$$\boldsymbol{y' = y \cdot \left[w' \cdot ln(u \cdot v) + w \cdot \left(\frac{u'}{u} + \frac{v'}{v}\right)\right]}$$

Подставим исходные выражения, получим окончательный ответ:

$$y' = \left[tg\left(\cos^3\frac{x^2}{3}\right)\cdot\sqrt[4]{arcctg\frac{3x}{7}}\right]^{\arccos x^7} \times$$

$$\left[\frac{1}{\sqrt{1-x^{14}}}\cdot 7x^6\cdot \ln\left(tg\left(\cos^3\frac{x^2}{3}\right)\cdot\sqrt[4]{arcctg\frac{3x}{7}}\right)\right.$$

$$+\arccos x^7\left(\frac{\frac{1}{\cos^2\left(\cos^3\frac{x^2}{3}\right)}\cdot\left(3\cos^2\frac{x^2}{3}\right)\cdot\sin\frac{x^2}{3}\cdot\frac{2x}{3}}{tg\left(\cos^3\frac{x^2}{3}\right)}\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\left(arcctg\frac{3x}{7}\right)^{-\frac{3}{4}}\cdot\frac{-1}{1+\left(\frac{3x}{7}\right)^2}\cdot\frac{3}{7}}{\sqrt[4]{arcctg\frac{3x}{7}}}\right)\right]$$