

Разложение в ряд Тейлора для основных элементарных функций

Формула Тейлора для функции $f(x)$ в точке x_0

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)$$

Ряд Тейлора для основных элементарных функций при $x_0 = 0$ (Маклорена):

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad x \in R$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad x \in R$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad x \in R$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad x \in R$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad x \in R$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \quad |x| < 1$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \dots =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \quad |x| < 1$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + R_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad |x| < 1$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + R_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad |x| < 1$$

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)! x^{2n+1}}{2^{2n} (n!)^2 (2n+1)} \quad |x| \leq 1 \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} \quad |x| < 1 \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}; \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta)$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta) \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \sin(\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta)$$

$$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$$