

# Список задач для подготовки к экзамену по линейной алгебре 1 семестр

## Тема 1 . Алгебра матриц

1.  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ . Найти  $3A+2B$ .

2.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$ . Найти  $A+B+A^T+B^T$ .

3.  $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ . Найти  $AB - BA$ .

4.  $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ ;  $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$  Найти  $C=AB-BA$

5.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$  Найти  $A \cdot A^T$  и  $A^T \cdot A$ .

6.  $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} = ?$  7.  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = ?$

7. Найти значение многочлена  $f(x) = 5x^3 + 3x^2 - 7x + 8$  от матрицы  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

8. Найти значение многочлена  $f(x) = x - 2x^2 - 3$  от матрицы  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

9. Вычислить определитель:

а)  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ ; б)  $\begin{vmatrix} \sin \alpha & -\cos \alpha \\ \cos \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix}$ ; в)  $\begin{vmatrix} a-b & a+b \\ a+b & a-b \end{vmatrix}$ ; г)  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ ;

д)  $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -5 & 2 \\ 2 & -3 & 6 \end{vmatrix}$ ; е)  $\begin{vmatrix} 8 & 7 & 2 & 10 \\ -8 & 2 & 7 & 10 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}$ ; ж)  $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$ .

10. Решить уравнение: а)  $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix} = 0$ ; б)  $\begin{vmatrix} 3 & x & -x \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

11. Найти матрицу, обратную данной:

а)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ; б)  $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ ; в)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ ; г)  $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ;

12. Найти  $(AB)^{-1} - B^{-1}A^{-1}$ , где  $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ .

13. Найти  $(AB)^T - B^T A^T$ , где  $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ .

14. Решить матричное уравнение: а)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$ ;

б)  $X \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}$ ; в)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 15 & 3 \\ -45 & 76 & 2 \end{pmatrix}$

15. Решить уравнения  $AX=B$  и  $YA=C-3Y$ , где  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 10 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ 7 & -13 \\ -9 & 1 \end{pmatrix}$
16. Вычислить значение функции  $f(x) = 3x^2 - 3x + 2x^{-1} - x^{-2} + 2$  при  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

## Тема 2 . СЛАУ

1. Решить СЛАУ по правилам Крамера, с помощью обратной матрицы и методом Гаусса:

а)  $\begin{cases} 3x + y = 1 \\ x - 2y = 5 \end{cases}$  ; б)  $\begin{cases} x + y + z = -1 \\ 2x - y - z = 7 \\ x - 2y + 2z = -4 \end{cases}$  в)  $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x - y - 2z = -2 \\ 3x + y + 4z = 4 \end{cases}$ .

2. При каких  $x, y, z$  матрица  $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & x \\ 1 & -5 & y \\ -1 & 6 & z \end{pmatrix}$  является обратной к матрице  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ?

3. Используя правило Крамера, выяснить, при каких значениях  $a$  система  $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases}$

имеет бесконечно много решений

4. Найти ранг матрицы:

а)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 7 & 8 & 18 \\ 3 & 7 & 17 \end{pmatrix}$ ; б)  $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ ; в)  $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ ;

5. Найти общее решение и ФСР однородной системы:

а)  $\begin{cases} x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_5 = 0 \\ 2x_1 + 5x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 0 \end{cases}$ , б)  $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ 3x - 3y + 7z = 0 \\ 3x + 2z = 0 \end{cases}$  в)  $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$

6. Найти общее решение неоднородной системы и ФСР однородной системы:

а)  $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3 \end{cases}$ , б)  $\begin{cases} x - 2y - 3z = -3 \\ x + 3y - 5z = 0 \\ -x + 4y + z = 3 \\ 3x + y - 13z = -6 \end{cases}$ ; в)  $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + y - 3z = -1 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ x + 2y - 3z = 1 \end{cases}$

г)  $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 4 \\ 3x_1 + 8x_2 - 4x_4 = 14 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 5 \end{cases}$  д)  $\begin{cases} x + y + z = -1 \\ 2x - y - z = 7 \\ x - 2y + 2z = -4 \end{cases}$  е)  $\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2 \end{cases}$

7. При каких значениях параметра  $\lambda$  система  $\begin{cases} 2x + (\lambda + 2)y - z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \\ 5x - 3y + \lambda z = 0 \end{cases}$  имеет нетривиальное решение? Найти его.

### Тема 3 Векторная алгебра

1. Разложить вектор  $d = \{-6; 0; 13\}$  по базису из векторов  $a = \{2; -1; 3\}$ ,  $b = \{1; 1; -1\}$ ,  $c = \{-3; 1; 2\}$
2. Даны точки A(1;2;3) и B(3;5;9). Найти координаты вектора  $\overrightarrow{AB}$ , его длину и направляющие косинусы.
3. Даны векторы  $a = (-2; 3; 5)$  и  $b = (4; -1; 7)$ . Найти координаты вектора  $3\vec{a} - 2\vec{b}$
4. Определить, при каких значениях  $\alpha$  и  $\beta$  векторы  $\vec{a} = 2\vec{i} + \alpha\vec{j} + \vec{k}$  и  $\vec{b} = 3\vec{i} - 6\vec{j} + \beta\vec{k}$  коллинеарны?
5. Коллинеарны ли векторы  $\vec{c} = 4\vec{a} - 2\vec{b}$  и  $\vec{d} = \vec{b} - 2\vec{a}$ , построенные на векторах  $\vec{a}(1; -2; 5)$  и  $\vec{b}(3; -1; 0)$  ?
6. Даны 3 последовательные вершины параллелограмма: A(1,1,4), B(2,3,-1) и C(-2,2,0). Найти координаты вершины D.
7. Даны точки A(0;2;-1), B(1;-1;4) и C( $\alpha$ ;-1; $\beta$ ). При каких  $\alpha$  и  $\beta$  точка C лежит на прямой AC?
8. Найти скалярное произведение  $(3\vec{a} - 2\vec{b}, 2\vec{a} + \vec{b})$ , если  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = 3$ ,  $\widehat{\vec{a}, \vec{b}} = 120^\circ$
9. Даны векторы  $\vec{a} = (2; 3; -1)$ ,  $\vec{b} = (-1; 2; 1)$ . Найти скалярное произведение  $(3\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} + 2\vec{b})$
10. Найти косинус угла между векторами  $\vec{a} = (2; -2; 1)$ ,  $\vec{b} = (-6; 3; 2)$ .
11. В треугольнике ABC с вершинами A(5;-1;4), B(3;-2;5) и C(5;2;3) найти:
  - а) длину медианы AM;
  - б) координаты точки пересечения медиан
  - в) основание биссектрисы BL.
  - г) величину угла B
12. Даны векторы  $a = \{2; -1; 1\}$ ,  $b = \{3; 3; 4\}$  и  $c = \{2; 0; 2\}$ . Найти координаты вектора  $d$ , если известно, что он перпендикулярен векторам  $a$  и  $b$ , а скалярное произведение  $dc = -8$
13. Найти острый угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a}(2; 1; 0)$  и  $\vec{b}(0; -1; 1)$
14. Вычислить проекцию вектора  $2\vec{a} - \vec{b}$  на вектор  $\vec{a} + \vec{b}$ , если  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ ,  $\widehat{\vec{a}, \vec{b}} = 120^\circ$
15. Дано  $\vec{a} \perp \vec{b}$ ,  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2$ ,  $|\vec{c}| = 1$ ,  $\widehat{\vec{a}, \vec{c}} = \widehat{\vec{b}, \vec{c}} = \pi/3$ . Найти  $(\vec{e}, \vec{f})$ , где  $\vec{e} = 2\vec{a} - \vec{b}$ ,  $\vec{f} = \vec{c} - \vec{a}$
16. Даны векторы  $\vec{a} = (3; -2; 6)$ ,  $\vec{b} = (-2; 1; 0)$ . Определить проекции векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  на векторы  $\vec{a} + \vec{b}$ ,  $\vec{a} - \vec{b}$ ,  $-\frac{1}{2}\vec{b}$
17. Даны векторы  $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$  и  $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ . Найти  $[2\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} + 2\vec{b}]$
18. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a} = (2, -1, 3)$ ,  $\vec{b} = (1, 4, -1)$
19. Найти площадь треугольника и длину высоты BD в треугольнике ABC с вершинами A(5;-1;4), B(3;-2;5) и C(5;2;3)
20. Вычислить площадь параллелограмма, диагоналями которого служат векторы  $2\vec{e} - \vec{f}$  и  $4\vec{e} - 5\vec{f}$ , где  $\vec{e}$  и  $\vec{f}$  – орты,  $\widehat{\vec{e}, \vec{f}} = \pi/4$
21. Вычислить угол между векторами  $\vec{a} = 2\vec{p} + 3\vec{q}$  и  $\vec{b} = 4\vec{p} - \vec{q}$  и площадь параллелограмма, построенного на этих векторах, если  $|\vec{p}| = 2$ ,  $|\vec{q}| = 3$ ,  $\widehat{\vec{p}, \vec{q}} = 2\pi/3$
22. Компланарны ли векторы  $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ ,  $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$  и  $\vec{c} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$  ?
23. Компланарны ли векторы  $\vec{a} = (-2, 1, 1)$ ,  $\vec{b} = (1, -2, 3)$ ,  $\vec{c} = (14, -13, 7)$  ?
24. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах  $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ ,  $\vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ ,  $\vec{c} = \vec{i} - \vec{k}$ . Установить, какой тройкой (правой или левой) является тройка векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$
25. Найти объем тетраэдра с вершинами O(1;1;2), A(2;3;-1), B(2;-2;4) и C(-1;1;3) и высоту OD.

26. Лежат ли точки  $A(1;0;7)$ ,  $B(2;-2;4)$  и  $C(-1;1;3)$   $D(3,2,-1)$  в одной плоскости ?
27. При каких  $\lambda$  векторы  $\vec{a} = (\lambda; 3; 1)$ ,  $\vec{b} = (5; -1; 2)$ ,  $\vec{c} = (-1; 5; 4)$  компланарны ?
28. Векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  образуют левую тройку,  $|\vec{a}| = 1$ ,  $|\vec{b}| = 2$ ,  $|\vec{c}| = 3$ ,  $\widehat{\vec{a}, \vec{b}} = \pi/3$ ,  $\vec{a} \perp \vec{c}$ ,  $\vec{c} \perp \vec{b}$ . Вычислить их смешанное произведение.

## **Тема 4 . Аналитическая геометрия**

1. а) Написать уравнение прямой, проходящей через точки  $A(-3;4)$  и  $B(2;3)$ .  
 б) Найти общее уравнение прямой.  
 в) Найти угол наклона полученной прямой к положительному направлению оси  $Ox$ .  
 г) Составить уравнение прямой, проходящей через точку  $A$  перпендикулярно данной.
2. Даны вершины треугольника  $A(1;2)$ ;  $B(2;-2)$  и  $C(4;3)$ . Найти:
  - а) уравнение стороны  $AC$ ;
  - б) уравнение медианы  $AM$ ;
  - в) уравнение высоты  $BD$ ;
  - г) уравнение средней линии, параллельной  $AC$ .
3. В треугольнике с вершинами  $A(-2;-1)$ ,  $B(-1,2)$  и  $C(1,0)$  найти уравнение биссектрисы, проведенной из вершины  $A$ .
4. Дана прямая  $L: -2x + y - 1 = 0$  и точка  $A(-1;2)$ .
  - а) Вычислить расстояние от точки  $A$  до прямой  $L$ .
  - б) Написать уравнение прямой, проходящей через точку  $A$  параллельно прямой  $L$ .
  - в) Написать параметрическое уравнение прямой, проходящей через точку  $A$  перпендикулярно прямой  $L$ .
  - г) Найти угол между прямой  $L$  и прямой  $3x - 5y + 7 = 0$ .
  - д) Найти проекцию точки  $A$  на прямую  $L$ .
  - е) Найти точку, симметричную точке  $A$  относительно прямой  $L$ .
  - ж) Найти уравнение прямой, равноудаленной от точки  $A$  и прямой  $L$ .
  - з) Найти точку, симметричную точке  $A$  относительно прямой, проходящей через точки  $B(2;-2)$  и  $C(4;3)$ .
5. Найти расстояние между прямыми  $2x+3y-1=0$  и  $-4x-6y-3=0$ .
6. Найти угол между прямыми  $x+3y-2=0$  и  $2x+y+1=0$ .
7. Найти вершины треугольника, если даны его стороны  $x+4y-5=0$ ;  $7x+5y+11=0$ ;  $6x=y-7=0$ .
8. Даны стороны треугольника  $x+y-1=0$ ,  $2x-y+3=0$ ,  $5x-y-5=0$ . Найти величины внутренних углов треугольника.
9. Даны уравнения двух сторон параллелограмма:  $2x + y + 3 = 0$  и  $2x - 5y + 9 = 0$  и уравнение одной из его диагоналей:  $2x - y - 3 = 0$ . Найти координаты вершин этого параллелограмма
10. Составить уравнения сторон треугольника  $ABC$ , Если  $A(3; -1)$  и  $B(5; 7)$  – вершины треугольника  $ABC$ , а  $M(4; -1)$  – точка пересечения его высот.
11. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку  $A(2;5;-3)$  перпендикулярно  $BC$ , где  $B(7;8;-1)$ ,  $C(9;7;4)$ .
12. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку  $A(1;0;-2)$  параллельно плоскости  $2x - y + 5z - 4 = 0$ .
13. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку  $M(2;-1;5)$  параллельно векторам  $\vec{a} = (3; -1; 1)$  и  $\vec{b} = (2; 1; -2)$ .
14. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку  $M(2;-1;3)$  перпендикулярно линии пересечения плоскостей  $2x + y - 2z + 1 = 0$  и  $x + y + z - 5 = 0$ .

15. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки  $A(2;3;-1)$  и  $B(1;5;3)$  параллельно вектору  $\vec{a} = (3; -1; 3)$ .
16. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку  $M(2;-1;5)$  параллельно векторам  $\vec{a} = (3; -1; 1)$  и  $\vec{b} = (2; 1; -2)$ .
17. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки  $A(2,-15,1)$ ,  $B(3,1,2)$  перпендикулярно плоскости  $3x-y-4z=0$
18. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $M_1(1,2,3); M_2(4,-1,-2); M_3(4,0,3)$
19. Найти расстояние от точки  $M(1;2;-3)$  до плоскости, проходящей через точки  $A(-3;4;-7)$ ,  $B(1;5;-4)$  и  $C(-5;-8;0)$ .
20. Найти точку пересечения плоскостей  $x - y - z - 10 = 0$ ,  $4x + 11z + 43 = 0$  и  $7x - 5y - 31 = 0$
21. Исследовать взаимное расположение плоскостей. Если плоскости параллельны, найти расстояние между плоскостями. Если пересекаются, то угол между плоскостями.
- а)  $x + y - 1 = 0$  и  $2x - y + 3z + 1 = 0$ .
- б)  $x + 2y - 2z + 2 = 0$  и  $3x + 6y - 6z - 4 = 0$ .

22. Составить канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку  $M(-1,1,3)$  параллельно вектору  $\vec{a}=(1,-3,4)$ .

23. Составить канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку

$$\frac{x}{-3} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-2}{0}$$

$M(-2,1,0)$  параллельно прямой

24. Написать канонические и параметрические уравнения медианы  $AP$  треугольника  $ABC$ :  $A(2;3;1)$ ,  $B(1;-2;0)$  и  $C(-3;2;2)$ .

25. Написать уравнение прямой, проходящей через точку  $A(1;-2;0)$  перпендикулярно плоскости  $3x - y + 2z - 1 = 0$ .

26. Даны вершины треугольника  $A(1,-1,3)$ ,  $B(3,-3,9)$  и  $C(-5,11,7)$ . Составить канонические и параметрические уравнения средней линии, параллельной стороне  $BC$ .

27. Доказать, что точки  $A(-3,-7,-5)$ ,  $B(0,-1,-2)$  и  $C(2,3,0)$  лежат на одной прямой, причем точка  $B$  – между  $A$  и  $C$ . Составить канонические уравнения этой прямой

28. Написать канонические уравнения прямой  $\begin{cases} x + y - z + 2 = 0 \\ x - y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$

29. Написать канонические уравнения прямой, проходящей через точку  $A(2; -3; 4)$  параллельно прямой  $\begin{cases} x + y - z + 2 = 0 \\ x - y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$ .

30. Вычислить угол между прямыми:

а)  $\frac{x+1}{1} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-4}{2}$  и  $\begin{cases} x = -3t + 1 \\ y = 2 \\ z = 4t + 12 \end{cases}$ ; б)  $\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{\sqrt{2}}$  и  $\frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{\sqrt{2}}$

31. Определить угол между прямыми  $\begin{cases} 3x - 4y - 2z = 0 \\ 2x + y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$  и  $\begin{cases} 4x + y - 6z - 2 = 0 \\ y - 3z + 2 = 0 \end{cases}$ .

32. Доказать, что прямые  $\frac{x+2}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z}{1}$  и  $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y - 5z - 8 = 0 \end{cases}$  параллельны.

33. Доказать, что прямые  $\begin{cases} x - y + 2z - 1 = 0 \\ 2x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$  и  $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - 3z = 0 \end{cases}$  скрещиваются.

34. Доказать, что прямые  $\frac{x+3}{4} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-1}{2}$  и  $\begin{cases} x+y-z+4=0 \\ 2x-3y-z-5=0 \end{cases}$  пересекаются и найти их точку пересечения

35. Доказать, что прямые  $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{3}$  и  $\begin{cases} 3x+y-5z+1=0 \\ 2x+3y-8z+3=0 \end{cases}$  перпендикулярны

36. Найти расстояние между прямыми  $\begin{cases} x+z-1=0 \\ 7x+12y-7z-7=0 \end{cases}$  и  $\frac{x-3}{6} = \frac{y+6}{-7} = \frac{z-9}{-6}$

37. Найти расстояние между прямыми  $\frac{x}{21} = \frac{y-4}{20} = \frac{z+4}{14}$  и  $\frac{x+3}{7} = \frac{y+11}{8} = \frac{z+7}{7}$

38. Найти расстояние между прямыми  $\begin{cases} x = -2 + 5t \\ y = -3 + t \\ z = -3 + 2t \end{cases}$  и  $\begin{cases} x = -4 + 3t \\ y = -8 + 2t \\ z = -6 + 2t \end{cases}$

39. Исследовать взаимное расположение прямых. Если прямые параллельны или скрещиваются, найти расстояние между прямыми. Если прямые пересекаются, найти их точку пересечения.

а)  $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{-2}$  и  $\frac{x+1}{1} = \frac{y+11}{2} = \frac{z+6}{1}$

б)  $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{-2}$  и  $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2t \\ z = 5 \end{cases}$

в)  $\begin{cases} 5x - 8y - 3z - 10 = 0 \\ x + 4y - 9z - 2 = 0 \end{cases}$  и  $\frac{x-4}{6} = \frac{y+6}{3} = \frac{z-3}{2}$

40. Найти угол между прямой, проходящей через точки A(-1;0;5) и B(1;2;0) и плоскостью  $x - 3y + z = 0$ .

41. Найти точку пересечения прямой  $\frac{x-1}{4} = \frac{y}{12} = \frac{z-6}{-3}$  и плоскости  $6x-3y+2z=0$ .

42. Доказать, что прямая  $\begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ 3y - 4z - 9 = 0 \end{cases}$  и плоскость  $2x+4y+3z-3=0$  перпендикулярны

43. Найти проекцию точки A(5;2;-1) на плоскость  $2x - y + 3z + 23 = 0$ . Найти точку, симметричную точке A относительно данной плоскости.

44. Найти проекцию точки A(4;3;10) на прямую  $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{5}$  и расстояние от A до прямой.

45. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M(2,0,1) перпендикулярно прямой

$$\frac{x+1}{4} = \frac{y-1}{0} = \frac{z}{-1}$$

46. Провести плоскость через точку M(2;0;1) и прямую  $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+1}{-1}$ .

47. Провести плоскость через точку M(1;-1;1) и прямую  $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2t \\ z = 5 \end{cases}$

48. Убедиться, что прямые  $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{4}$  и  $\frac{x-7}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{-2}$  принадлежат одной плоскости и составить уравнение этой плоскости.

49. Составить уравнение плоскости, проходящей через пару параллельных прямых

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{1} \quad \text{и} \quad \frac{x+1}{-4} = \frac{y+3}{-6} = \frac{z}{-2}$$

## Тема 5 . Кривые и поверхности 2 порядка

1. Найти собственные числа и собственные векторы матрицы:

а)  $\begin{pmatrix} 8 & 9 \\ -5 & -6 \end{pmatrix}$ ; б)  $\begin{pmatrix} 10 & -6 \\ 18 & -11 \end{pmatrix}$  ; в)  $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$  ; г)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

2. Привести квадратичную форму к каноническому виду, указать преобразование координат:  
Указать тип кривой или поверхности 2 порядка

а)  $\varphi(x_1, x_2) = 9x_1^2 + 12x_1x_2 + 4x_2^2$ ; б)  $\varphi(\vec{x}) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 9x_3^2 + 8x_2x_3$  ;

в)  $\varphi(\vec{x}) = 11x^2 + 5y^2 + 2z^2 + 16xy + 4xz - 20yz$

3. Найти полуоси, координаты фокусов и эксцентриситет эллипса  $9x^2 + 4y^2 = 36$  . Сделать чертеж

4. Составить каноническое уравнение эллипса, зная, что его большая полуось равна 12, эксцентриситет 0,5 . Сделать чертеж

5. Составить уравнение эллипса с фокусами в точках  $F_1(0; -1)$  ,  $F_2(0; 1)$  и малой полуосью, равной 2. Сделать чертеж

6. Определить фокусы, вершины и эксцентриситет гиперболы  $9x^2 - 16y^2 + 144 = 0$  . Сделать чертеж

7. Составить уравнение гиперболы с фокусами в точках  $F_1(0; -3)$  ,  $F_2(0; 3)$  и мнимой полуосью, равной 2. Найти асимптоты. Сделать чертеж

8. Составить уравнение кривой, каждая точка которой равноудалена от прямой  $y = -1$  и точки  $F(2; -5)$ . Сделать чертеж

9. Исследовать поверхность  $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$  координатными плоскостями. Найти точки пересечения с прямой  $\frac{x-\sqrt{11}}{0} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+11}{1}$  . Установить тип поверхности, сделать чертеж.

10. Установить тип поверхности, сделать чертеж.  $4 - z = x^2 + y^2$

11. Установить тип поверхности, сделать чертеж.  $x^2 - y^2 + z^2 + 4 = 0$  .