

Список основных задач для подготовки к экзамену по математическому анализу 1 семестр

Тема 1. Предел

1. Вычислить предел последовательности:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+6}{3n-7}$; 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+3n+1}{4n^3+2n+2}$; 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^4+2n^2-7}{2n^2-n+5}$; 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n} \right)$;

5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{n+1} - \frac{2n+1}{2} \right)$; 6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)!+(n+3)!}{(n+1)!}$; 7) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n^2+3n+5}-5n+2\sqrt{n+1}}{7n+9\sqrt{n-3}+4}$;

8) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{3n^2-2n+1} - \sqrt{3n^2+7n-5}$; 9) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2+3})$;

10) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2n^2+9n+11} - \sqrt{n^2-6n+4}$ 11) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt[6]{n} + \sqrt[5]{32n^{10}+10n^7}}{(n + \sqrt[4]{n})\sqrt[3]{n^3-1}}$ 12) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n + 6^{n+1}}{4^{n+1} - 6^n}$.

13) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{3n}$; 14) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+7}{2n+4} \right)^{n^2/2}$; 15) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+4}{n^2-8} \right)^{-3n^2+1}$; 16) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n^3-3}{4n^3-1} \right)^{3n^3-2}$

2. Вычислить предел функции:

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-5x+6}{x^2-2x}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-2x}$; 3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}$; 4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+7x^2+9}{2^{x+1}-x^2+4x}$;

5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}$; 6) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$; 7) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{(x+1)(x+2)} - x)$; 8) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x^2-2}$;

9) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x \left(2 + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \right) + 8 \cos x}$; 10) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x + \sqrt[3]{1-x^3})$; 11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{3x}$;

12) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\sin 3x}$; 13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x-2x}{\operatorname{tg} 5x}$; 14) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin \frac{1}{x}$; 15) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(3x-9)}{2x-6}$;

16) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a}$; 17) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos 2x}{x^2}$; 18) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin 5x}{x - \sin 7x}$; 19) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - 2 \operatorname{arctg} 2x}{x + \arcsin 3x}$

20) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}}{x}$, 21) $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$; 22) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x} \right)^x$;

23) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{7x^2} \right)^{2x}$; 24) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{3x}$; 25) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{x-1} \right)^{3x}$; 26) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{2x-1} \right)^{3x}$;

27) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x^2} \right)^{3x^3}$; 28) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2-2x+1}{x^2+5x-1} \right)^{4x}$ 29) $\lim_{x \rightarrow 0} (1-5x^2)^{\frac{2}{x^2}}$; 30) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+5x^3)^{\frac{2}{x^2}}$;

31) $\lim_{x \rightarrow 0} (1-2 \sin x)^{\sin^2 x}$; 32) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (1-\cos x)^{\operatorname{tg} x}$; 33) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3 \sin x + 1}{2x+1} \right)^{3/x}$; 34) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x}$.

35) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin x}{1-\cos x}$; 36) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\ln(1-x)}$; 37) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\ln(e-2x)-1}$; 38) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin 2x}$;

39) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+x}-3}{3 \operatorname{tg} 2x}$; 40) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3}$; 41) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin^2 3x}{\cos 4x - \cos 3x}$; 42) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{\ln x}$;

$$43) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x-3)}{x^2-4x+3}, \quad 44) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos 3x - \cos x}{\operatorname{tg}^2 2x}; \quad 45) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2-x-1}-1}{\ln(x-1)}; \quad 46) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\operatorname{In} \cos x}.$$

$$47) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \ln \cos x)^{3/x^2} \quad 48) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x3^x}{1+x2^x} \right)^{1/x^2}; \quad 49) \lim_{x \rightarrow \pi/2} (\sin x)^{3 \operatorname{tg} x}; \quad 50) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{-1/x^2}$$

3. Исследовать функции на непрерывность, найти точки разрыва; указать характер разрыва. В случае устранимого разрыва доопределить до непрерывной функции:

$$1) f(x) = \frac{\sin x}{x}; \quad 2) f(x) = \begin{cases} \frac{|x+1|}{x+1} x - 1, & x \neq -1 \\ 1, & x = -1 \end{cases}; \quad 3) y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x-4}; \quad 4) y = e^{\frac{1}{x+1}}; \quad 5) y = e^{-\frac{1}{|x+1|}}$$

$$5) f(x) = \frac{x^2-25}{x+5}; \quad 6) f(x) = \frac{1}{2^{1-x}+1}; \quad 7) y = \frac{\sqrt{x+15}-3}{x^2-36}; \quad 8) y = \begin{cases} \cos x, & -\frac{\pi}{2} \leq x < -\pi/4 \\ x, & x \in [-\frac{\pi}{4}; 2) \\ x^2 - 2, & 2 \leq x \end{cases}$$

Тема 2 . Производная функции

1. Вычислить производную функции $y=f(x)$:

$$1) y = \sqrt[3]{x^5} \cos x - \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^4}; \quad 2) y = \frac{\operatorname{tg} x}{\arccos x} + \ln x \cdot 3^x - \operatorname{sh} x; \quad 3) y = \cos^3 x;$$

$$4) y = \cos x^3; \quad 5) y = \frac{1}{\sqrt{x^2+3x+1}}; \quad 6) y = \ln(\operatorname{arctg} x); \quad 7) y = \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$8) y = \sqrt{(1 + \arccos x)^3}; \quad 9) y = 2 \ln(x^2 - 5x + 3) + \operatorname{th} 9\sqrt{x} - \cos 3.$$

$$10) y = \ln(\cos^2 x + \sqrt{1 + \cos^4 x}); \quad 11) y = (\arcsin(2^x))^4; \quad 12) y = \sin(3\sqrt{\operatorname{tg} x})$$

$$13) y = (\ln \operatorname{tg} x - 5)^4; \quad 14) y = e^{-2x} \cdot \operatorname{arctg}(6x+2) + \frac{\operatorname{tg} 2x}{\arcsin^2 x}; \quad 15) y = \frac{\cos 3x}{2-4^x} - \sin(e^x)$$

$$16) y = \ln \frac{x+1}{x} \cdot \arccos x - 5 \operatorname{tg} \sqrt{3x}; \quad 17) y = 6 \ln^5(1 - \cos^3 7x) + 3 \ln \cos 5; \quad 18) y = e^{\cos x} \cdot (x + \frac{1}{\cos x})$$

$$19) y = x^x; \quad 20) y = (\operatorname{ctg} x)^{x^3}; \quad 21) y = y = x^{2\sqrt{x}} + 2x^x; \quad 22) y = \frac{3^x \operatorname{tg}^2 x \sqrt[5]{(2x-1)^3}}{20\sqrt{x+1} \sqrt[3]{1-x}}.$$

2. Найти уравнение касательной и нормали к кривой $y=f(x)$ в указанной точке:

$$1) y = x^3 + 2x, M(1,3); \quad 2) y = \frac{\ln x}{x}, x_0 = 1; \quad 3) \text{ касательная к кривой } y = \ln x \text{ параллельна прямой } y = 2x-3; \quad 4) y = e^{1-x^2} \text{ в точках пересечения с прямой } y = 1.$$

3. Найти производную неявно заданной функции:

$$1) x^3 y^2 + 5xy + 4x^4 - 3y^3 = 0 \quad 2) x^2 y^2 + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = 3 \quad 3) x^y = y^x$$

4. Найти производную параметрически заданной функции:

$$\text{a) } \begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x = \frac{3t}{1+t^3} \\ y = \frac{3t^2}{1+t^3} \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} x = \ln^2 \sin t \\ y = 3\cos 4t - t \sin 2t \end{cases}$$

5. Вычислить дифференциал заданной функции :

$$1) y = (1 + tg 3x)^8 ; \quad 2) y = \arctg \ln \sin 2^x$$

6. Вычислить производную функции указанного порядка:

$$1) y = tg x, y'' = ?; \quad 2) y = (x + 1)^5, y''' = ?; \quad 3) y = x^3 e^x, y^{IV} = ?$$

7. Вычислить дифференциал третьего порядка функции $y = \arctg x$

8. Найти производную второго порядка неявно заданной функции:

$$1) \arctg y - y + xy = 0 \quad 2) e^{2xy^2} + 4xy^2 = e^2$$

9. Найти производную второго порядка параметрически заданной функции:

$$1) \begin{cases} x = \ln t \\ y = \sin 2t \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x = \sin t - t \cos t \\ y = \cos t + t \sin t \end{cases}$$

10. Вычислить предел функции, используя правило Лопиталья:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{\ln x}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin 5\pi x}{\sin 2\pi x}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctg 2x}{\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{x^3 - 5x^2 + 7x - 3};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{ctg x - 1}{\sin 4x}; \quad 6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - tg x}{\sin x - x^3}; \quad 7) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}; \quad 8) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x};$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 3x - 1}{x - \sin^2 5x}; \quad 10) \lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) tg x; \quad 11) \lim_{x \rightarrow 0+} x^3 \ln x; \quad 12) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right);$$

$$13) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - \sqrt{x}); \quad 14) \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^2); \quad 15) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + tg x)^{\frac{1}{x}}; \quad 16) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \left(tg \frac{\pi x}{2}\right)^{\frac{x}{1-2x}}$$

11. Определить экстремумы и интервалы монотонности функции:

$$1) f(x) = \frac{e^x}{x}; \quad 2) f(x) = \frac{x^{2/3}}{x+2}; \quad 3) f(x) = x^3 e^{-x}.$$

12. Определить наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке:

$$1) y = \frac{4-x^2}{4+x^2}, x \in [-1; 3]; \quad 2) y = x e^{-x^2/2}, x \in [-2; 2]; \quad 3) y = x^2 e^x, x \in [-3; 1]$$

13. Определить точки перегиба и интервалы выпуклости функции

$$1) f(x) = x^6 - 6x^5 + \frac{15}{2}x^4 + 3x. \quad 2) y = \frac{3 \ln x}{\sqrt{x}}; \quad 3) y = \frac{e^x}{x^2 - 1}$$

$$14. Найти асимптоты функции: \quad 1) y = \frac{4+x^3}{4-x^2}; \quad 2) y = \frac{1}{(x-2)^2}; \quad 3) y = \frac{x^2+3x+1}{x+1}$$

Тема 3. Неопределенный интеграл

1. Вычислить неопределенный интеграл:

- 1) $\int \left(x^5 - \frac{3}{x^4} + \sqrt[3]{x^2} + \frac{7}{x} - 4 \right) dx$ 2) $\int \left(e^x + x^e - 2 \sin 2x - \frac{3}{\cos^2 x/2} \right) dx$
- 3) $\int \left(\frac{4}{\sqrt{4-x^2}} + \frac{4}{\sqrt{4+x^2}} \right) dx$ 4) $\int \left(\frac{1}{x^2+9} + \frac{1}{x^2-9} \right) dx$ 5) $\int \frac{dx}{\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}$ 6) $\int 2^{x+1} e^x dx$
- 7) $\int \frac{x \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x}{2^x} dx$ 8) $\int \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} dx$ 9) $\int tg^2 x dx$ 10) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$ 11) $\int \frac{dx}{x^4+x^2}$
- 12) $\int \frac{dx}{2x-5}$ 13) $\int \sqrt[3]{(3x-7)^5} dx$ 14) $\int \frac{\ln^2 x dx}{x}$ 15) $\int \frac{dx}{x \ln x}$ 16) $\int \frac{\cos \ln 3x dx}{x}$
- 17) $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{\sin^2 x + 3}}$ 18) $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{\sin^2 x + 3}}$ 19) $\int \frac{e^{tg x} dx}{\cos^2 x}$ 20) $\int \frac{x dx}{x^2+1}$ 21) $\int \frac{3x^2 dx}{x^3+4}$
- 22) $\int \frac{2x dx}{x^4+1}$ 23) $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2) \arcsin x}}$ 24) $\int \frac{\arctg^5 x dx}{x^2+1}$ 25) $\int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt{e^{2x}+1}}$ 26) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$
- 27) $\int \frac{2\sqrt{tg x} - 5 \sin x + 3x dx}{\cos^2 x}$; 28) $\int \frac{\arctg^2(x/2) + 4 - 3x}{x^2 + 4} dx$; 29) $\int \frac{2 \arcsin^3 2x - 5 - x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$; 30) $\int \frac{x \cos x + \sin x}{\sqrt[3]{(x \sin x)^4}} dx$
- 31) $\int x e^x dx$ 32) $\int x \cos x dx$ 33) $\int (x^2 + x) \sin 2x dx$ 34) $\int \ln x dx$ 35) $\int \arctg x dx$
- 36) $\int x \ln^2 x dx$ 37) $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx$ 38) $\int \cos x e^x dx$ 39) $\int \sqrt{1-x^2} dx$
- 40) $\int \frac{dx}{4-3x}$ 41) $\int \frac{dx}{(4-3x)^3}$ 42) $\int \frac{x dx}{x^2+6x+13}$ 43) $\int \frac{(3x-1) dx}{x^2-x+1}$ 44) $\int \frac{x+2}{(x^2+2x+5)^2} dx$
- 45) $\int \frac{2dx}{(x-3)(x+2)}$ 46) $\int \frac{2x+7}{x^2+x-2} dx$ 47) $\int \frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x} dx$ 48) $\int \frac{3x+2}{x(x+1)^3} dx$
- 49) $\int \frac{x^3-2x+2}{(x^2+1)(x-1)^2} dx$ 50) $\int \frac{x^3+3}{(x+1)(x^2+1)^2} dx$ 51) $\int \frac{dx}{\cos x}$ 52) $\int \frac{dx}{4 \sin x + 5}$ 53) $\int \frac{dx}{8-4 \sin x + 7 \cos x}$
- 54) $\int \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt[4]{\cos x}}$ 55) $\int \frac{\cos^3 x + 3}{\sin^2 x} dx$ 56) $\int \cos^2 x dx$ 57) $\int \sin^4 3x dx$ 58) $\int \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{\sin^2 x} dx$
- 59) $\int \frac{dx}{\sqrt{\cos^7 x \sin x}}$ 60) $\int \operatorname{ctg}^4 x dx$ 61) $\int \sin 4x \sin 6x dx$ 62) $\int \cos 9x \sin 5x dx$
- 63) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x - 3} dx$ 64) $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$ 65) $\int \frac{\sqrt{x} dx}{x - \sqrt[3]{x^2}}$ 66) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-x+3}}$ 67) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x-3x^2}}$
- 68) $\int \sqrt{9-x^2} dx$ 69) $\int \sqrt{1+x^2} dx$ 70) $\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x} dx$ 71) $\int \frac{dx}{(x+1)^2 \sqrt{x^2+2x+2}}$ 72) $\int \sqrt{x+x^2} dx$