***Тема* 1. Геометрические приложения определенного интеграла**

Занятие 1 . Вычисление площадей и длин плоских фигур.

I. *Площадь плоской фигуры* $S=\int_a^b\big(f_2(x)-f_1(x)\big)dx=\int_c^d\big(\varphi_2(y)-\varphi_1(y)\big)dy,\ S=\int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt.$ $S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\arccos x$, $x=-1, x=0, y=0.$ {π-1}
2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $(y-2)^2=x-1$, касательной к ней в точке $y=3$ и осью ОХ. {9?}
3. Вычислить площадь фигуры, отсекаемой первой аркой циклоиды от оси ОХ $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\y=a(1-\cos t)\end{cases}$. {$3a^2$π }
4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $r=a\ sin3\varphi$. {a^2π/4 }

II. *Длина дуги плоской кривой* $l=\int_a^b\sqrt{1+(y'(x))^2}dx,\ \ l=\int_\alpha^\beta\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt,$ $l=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2+(r')^2}d\varphi$

1. Вычислить длину дуги кривой $y^2=\frac{x^3}{6}$ до точки с абсциссой x=6 . {$\frac{16}{9}\big(13\sqrt{13}-2\big)$? }
2. Найти длину астроиды $\begin{cases}x=a\ cos^3t\\y=a\ sin^3t\end{cases}$ {6π}
3. Найти длину первого витка спирали Архимеда $r=\varphi$. {$\frac{1}{2}\big(\pi\sqrt{\pi^2+1}+Ln(4\pi+\sqrt{\pi^2+1})\big)$? }

Домашнее задание Демидович: №1623-1639, 1650-1653, 1667-1681

Занятие 2 . Вычисление объемов тел и площадей поверхностей тел вращения.

I. *Объем тела вращения* $V_X=\pi\int_a^b f^2(x)dx,\ \ V_Y=\pi\int_a^b g^2(y)dy=\pi\int_a^b xf(x)dx\ ,V_{ol}=\frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3\sin\varphi\,d\varphi$

1. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси ОY фигуры, ограниченной параболой $y=x^2$, ОY и прямой $y=1.$ {π/2 }
2. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной параболой $y=x^2$, ОХ и прямой $x=1.$ {π/5 }
3. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной петлей кривой $x=2t-t^2,\ y=4t-t^3.$ {64 π /35 }
4. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной кривой $r=\sqrt{\cos\varphi}.$

II. *Площадь поверхности вращения* $S_x=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx\ ,S_x=2\pi\int_\alpha^\beta r\sin\varphi\sqrt{r^2+(r')^2}d\varphi$ $S_x=2\pi\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt\ ;\ \ S=2\pi\int_a^b|y|ds$

1. Вычислить площадь поверхности части шара, получаемого при вращении вокруг оси ОХ дуги окружности $x^2+y^2=4$ между точками $x=-1, x=1$. {8π }
2. Вычислить площадь фигуры, полученной вращением первой арки циклоиды $x(t)=t-\sin t;\ y(t)=1-\cos t$ вокруг оси ОХ. {64π/3 }
3. Вычислить площадь поверхности вращения тела, образованного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной кривой $r=\cos\varphi$. {2π }

Домашнее задание Демидович: №1685-1692, 1715-1720

***Тема* 2. Механические приложения определенного интеграла**

Занятие 3 . Вычисление статических моментов и моментов инерции, координат центра тяжести.

.<u>*Статические моменты, моменты инерции и центры масс*</u>

гладкой кривой $M_x=\mu\int_a^b y\sqrt{1+(y'(x))^2}dx$, $M_y=\mu\int_a^b x\sqrt{1+(y'(x))^2}dx$, $I_x=\mu\int_a^b y^2\sqrt{1+(y'(x))^2}dx$, $I_y=\mu\int_a^b x^2\sqrt{1+(y'(x))^2}dx$, $l=\int_a^b \sqrt{1+(y'(x))^2}dx$, $x_c=\frac{M_y}{\mu l}$, $y_c=\frac{M_x}{\mu l}$

плоской фигуры $M_x=\frac{1}{2}\mu\int_a^b y^2dx$, $M_y=\mu\int_a^b xydx$, $I_x=\frac{1}{3}\mu\int_a^b y^2|y|dx$, $I_y=\mu\int_a^b x^2|y|dx$,

$m=\int_a^b ydx$, $x_c=\frac{M_y}{\mu\, m}$, $y_c=\frac{M_x}{\mu\, m}$

1. Найти моменты инерции относительно осей ОХ и ОY и центр тяжести дуги полуокружности $x^2+y^2=a^2$, $y\ge 0$ с постоянной плотностью 1 $\{\frac{a^3\pi}{2}$; $\frac{a^3\pi}{2}$?; 0; $\frac{2a}{\pi}\}$
2. Найти статические моменты и моменты инерции относительно осей ОХ и ОY и координаты центра тяжести треугольника, ограниченного прямыми $x+y=a, x=0, y=0$ с постоянной плотностью 1.
3. Найти статические моменты и моменты инерции относительно осей ОХ и ОY и координаты центра тяжести фигуры, ограниченной синусоидой $y=\sin x$ и отрезком оси ОХ от точки $x=0$ до $x=\pi$

Домашнее задание Демидович: №1728-1730,1753-1755

***Тема* 3. Криволинейные интегралы**

Занятие 4. Криволинейные интегралы первого и второго рода и их приложение.

I. Криволинейный интеграл по длине дуги L (I рода)
   1. Вычислить $\int_L \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, L: отрезок, соединяющий начало координат и точку А(1;2) $\{ln\frac{3+\sqrt{5}}{2}\}$
   2. Вычислить $\int_L \sqrt{x^2+y^2}\, dl$, L: окружность $x^2+y^2=6y$ {72}
   3. Найти массу дуги L: $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \\ z=t, 0\le t\le 2\pi \end{cases}$ с плотностью $\mu=2z-\sqrt{x^2+y^2}$ $\{\sqrt{2}(4\pi^2-2\pi\}$
   4. $\int_L (x^2+y^2)^2\, dl$, L: длина логарифмической спирали $r=ae^{m\varphi}$ от точки $A(0;a)$ до точки $O(-\infty;0)$ $\{a^5\frac{\sqrt{1+m^2}}{5m}\}$

II. Криволинейный интеграл по координатам (II рода)
   1. Вычислить $\int_L (x^2-2xy)\,dx+(y^2-2xy)dy$, L: дуга параболы $y=x^2, -1\le x\le 1$ {-14/15}
   2. Вычислить работу силового поля $\vec{F}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+(x+y-1)\vec{k}$ при перемещении массы вдоль прямой АВ от точки А(1;1;1) до точки В(2;3;4) {13}

III. Вычислить криволинейный интеграл по замкнутому контуру 2 способами: непосредственно и по формуле Грина $\oint_L Pdx+Qdy=\iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$
   1. $\oint_L (x+y)^2dx-(x^2+y^2)dy$, L: треугольник АВС с вершинами А(1;1); В(3;2);С(3;5) {-44}
   2. $\oint_L (x-y)dx+(x^2-y^2)dy$, L: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ {12π}

Домашнее задание Демидович: №2293-2302,2310-2313,2327-2330

Тема **5. Поверхностные интегралы**.

Занятие 5. Вычисление поверхностного интеграла первого и второго рода. Применение формул Остроградского-Гаусса и Стокса.

1. Вычислить массу части конической поверхности $z^2 = x^2 + y^2$, заключенной между плоскостями $z = 0$ и $z = 1$ с поверхностной плотностью $x^2 + y^2$ $\{\sqrt{2}\pi/2\}$
2. Найти площадь поверхности конуса $z^2 = x^2 + y^2$, заключенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 2y$ $\{2\sqrt{2}\pi\}$
3. Вычислить криволинейный интеграл $\oint_L y^2dx - x^2dy + z^2dz$ по контуру L, образованному при пересечении параболоида $x^2 + z^2 = 1 - y$ с координатными плоскостями двумя способами (непосредственно и по формуле Стокса $\text{Ц} = \oint_L \vec{a} \cdot d\vec{l} = \iint_S (rot\,\vec{a},\ \vec{n}_0)\,ds$) {-31/30}
4. Вычислить поверхностный интеграл II рода $\iint_S y\,dydz + xdxdz + zdxdy$ через треугольник, образованный пересечением плоскости $x - y + z = 1$ с координатными плоскостями {-1/2}
5. Вычислить поток векторного поля $\vec{a} = (x;\ -y; 1 - z)$ через полную поверхность конуса $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \le z \le H$ двумя способами (непосредственно и по формуле Остроградского $\Pi = \oiint_S (\vec{a},\ \vec{n}_0)ds = \iiint_V div\,\vec{a}\,dV$) $\{-\pi H^3/3\}$

   Домашнее задание Демидович: №2347-2359,2361-2364

Тема **6. Ряды Фурье**.

Занятие 6. Разложение в ряд Фурье функций с периодом 2π. ***Ряды Фурье для четных и нечетных функций***.

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),\ a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx,\ a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx,\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

1. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом 2π, определенную следующим способом: $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}, -\pi \le x \le 0 \\ 1,\quad 0 < x \le \pi \end{cases}$. Построить графики $S_0(x), S_1(x), S_2(x)$. Исследовать сходимость в точках разрыва
2. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом 2π, $f(x) = |x|,\ -\pi \le x \le \pi$
3. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом 2π, $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, -\pi < x < \pi \\ 0,\quad x = \pm\pi \end{cases}$

   Домашнее задание Демидович: №2671-2676

Занятие 7. Ряды Фурье функций с периодом 2l. Разложение в ряд Фурье функций, заданных на половине периода.

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}),\ a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx,\ a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\ b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

1. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом 4, определенную следующим способом: $f(x) = \begin{cases} x, & -1 < x < 1 \\ 0, & x\epsilon(-2;-1] \cup [1;2) \end{cases}$.
2. Функцию $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$, заданную на полуинтервале $0 < x < \pi$, разложить в ряд Фурье по косинусам.
3. Разложить функцию $f(x) = 2x - 2$, заданную на полуинтервале $x\epsilon(0; 2)$ в ряд Фурье а) по синусам; б) по косинусам; в) доопределив нулем
4. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x$ на интервале $x\epsilon(0; 2)$

Домашнее задание Демидович: №2683-2692

Занятие 8. Вычисление рядов

Равенство Парсеваля $\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f^2(x)\,dx = \frac{{a_0}^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}({a_n}^2 + {b_n}^2)$

1. При помощи разложения функции $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$ в ряд Фурье по косинусам (7.2) вычислить $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}$
2. При помощи разложения функции $f(x) = 2x - 2$ в ряд Фурье по синусам (7.3а) вычислить $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$
3. Вычислить сумму рядов а) $\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sin\, nx}{n}$
4. Вычислить сумму ряда а) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n \sin nx}{n^2-1}$

Домашнее задание Демидович: №2680-2682

***Тема* 7. Интеграл Фурье** .

Занятие 9. Представление функции интегралом Фурье. Амплитудный и фазовый спектры периодической функции

I. Интеграл Фурье $f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos z(t-x)\;dt$
   Для четных функций $f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\cos zx\,dz\int_0^{+\infty} f(t)\cos zt\;dt$
   Для нечетных функций $f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} sin\, zx\,dz\int_0^{+\infty} f(t)\sin zt\;dt$
   1. Представить интегралом Фурье функцию $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & x < 0, x > 1 \end{cases}$
   2. Представить интегралом Фурье функцию $f(x) = \begin{cases} 4-x, & 0 \le x \le 4 \\ 0, & x > 4 \end{cases}$, продолжив ее четным и нечетным образом на всю числовую ось
II. Преобразование Фурье $\hat{F}(f(x)) = F(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-izt}dt$, $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(z)e^{izx}dz$
   1. Найти спектральную плотность и амплитудный спектр, а также синус и косинус преобразования Фурье функции $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & x < 0, x > 1 \end{cases}$. Представить интегралом Фурье функцию $f(x)$.

Домашнее задание: курсовая работа