Двойные интегралы.

1. $S = \iint\limits_D dxdy$ - площадь плоской фигуры D.
2. $V = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$ - объем цилиндра $V: \begin{cases} (x,y) \in D \\ 0 \le z \le f(x,y). \end{cases}$
3. $\sigma = \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dxdy$ - площадь той части поверхности $z = f(x,y)$, которая проектируется в область D на плоскости Oxy.
4. $m = \iint\limits_D \mu(x,y)dxdy$ - масса пластинки D с плотностью распределения масс $\mu(x,y)$.
5. $M_x = \iint\limits_D y \cdot \mu(x,y)dxdy; \quad M_y = \iint\limits_D x \cdot \mu(x,y)dxdy$ - статические моменты фигуры D с плотностью $\mu(x,y)$ относительно осей координат Ox и Oy.
6. $x_0 = \frac{\mathrm{M}_y}{m}; \quad y_0 = \frac{\mathrm{M}_x}{m}$ - координаты центра масс плоской фигуры D
7. $I_x = \iint\limits_D y^2 \cdot \mu(x,y)dxdy; \quad I_y = \iint\limits_D x^2 \cdot \mu(x,y)dxdy$ -моменты инерции пластинки D с плотностью $\mu(x,y)$ относительно осей координат Ox и Oy.
8. $I_0 = \iint\limits_D (x^2 + y^2) \cdot \mu(x,y)dxdy$ - момент инерции пластинки D с плотностью $\mu(x,y)$ относительно начала координат.

Тройные интегралы.

1. $V = \iiint\limits_V dxdydz$ - объем тела V.
2. $m = \iiint\limits_V \mu(x,y,z)dxdydz$ - масса тела V с плотностью распределения масс $\mu(x,y,z)$.
3. Статические моменты тела V с плотностью $\mu(x,y,z)$ относительно координатных плоскостей: $K_{xy} = \iiint\limits_V z \cdot \mu \cdot dxdydz; \; K_{xz} = \iiint\limits_V y \cdot \mu \cdot dxdydz; \; K_{yz} = \iiint\limits_V x \cdot \mu \cdot dxdydz$.
4. $x_0 = \frac{K_{yz}}{m}; \; y_0 = \frac{K_{xz}}{m}; \; z_0 = \frac{K_{xy}}{m}$ - координаты центра масс тела с плотностью $\mu(x,y,z)$.
5. Моменты инерции тела V с плотностью $\mu(x,y,z)$ относительно координатных осей $Ox, \; Oy, \; Oz$:
$I_x = \iiint\limits_V (y^2 + z^2) \cdot \mu \cdot dxdydz; \; I_y = \iiint\limits_V (x^2 + z^2) \cdot \mu \cdot dxdydz; \; I_z = \iiint\limits_V (x^2 + y^2) \cdot \mu \cdot dxdydz$.
6. Моменты инерции тела V с плотностью $\mu(x,y,z)$ относительно координатных плоскостей: $I_{xy} = \iiint\limits_V z^2 \cdot \mu \cdot dxdydz; \; I_{xz} = \iiint\limits_V y^2 \cdot \mu \cdot dxdydz; \; I_{yz} = \iiint\limits_V x^2 \cdot \mu \cdot dxdydz$.
7. $\mathrm{I}_0 = \iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2)\mu(x,y,z)dxdydz$ - момент инерции тела V с плотностью $\mu(x,y,z)$

относительно начала координат.

Криволинейные интегралы

Криволинейные интегралы по длине дуги l от функции $u = f(x, y)$ (криволинейные интегралы 1-ого рода)

1) $y = y(x) \quad a \le x \le b, \quad dl = \sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx \qquad \int\limits_{\cup AB} f(M)dl = \int\limits_a^b f(x, y(x)) \cdot \sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx.$

2) $x = x(t),\ y = y(t), \qquad t_0 \le t \le t_1 \qquad dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$

$$\int\limits_{\cup AB} f(M)d\ell = \int\limits_{t_0}^{t_1} f(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt.$$

3) $\rho = \rho(\varphi),\ \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2 \qquad dl = \sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2}\,d\varphi$

$$\int\limits_{\cup AB} f(M) = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2}\,d\rho.$$

Приложения криволинейных интегралов по длине дуги

1. $\int\limits_l dl$ - длина дуги кривой;
2. $m = \int\limits_l \mu(M)dl$ масса дуги l с плотностью $\mu(M)$;
3. $x_0 = \dfrac{\int\limits_l x \cdot \mu(M)dl}{m}; y_0 = \dfrac{\int\limits_l y \cdot \mu(M)dl}{m}$ - координаты центра тяжести дуги l с плотн. $\mu(M)$;
4. $I_x = \int\limits_l y^2 \mu dl;\ I_y = \int\limits_l x^2 \mu dl;\ I_0 = \int\limits_l (x^2 + y^2)\mu dl$ - моменты инерции дуги кривой относительно осей координат O_x, O_y и начала координат

Линейные интегралы (криволинейные интегралы по координатам, криволинейные интегралы 2-ого рода)

1. $y = y(x) \qquad \int\limits_{\cup AB} Pdx + Qdy = \int\limits_a^b \left[P(x, y(x)) + Q(x, y(x)) \cdot y'(x)\right]dx.$
2. $x = x(t),\ y = y(t) \qquad \int\limits_{\cup AB} Pdx + Qdy = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left[P(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t), y(t)) \cdot y'(t)\right]dt$

Приложения линейных интегралов

1. $S = \iint\limits_D dxdy = \dfrac{1}{2}\oint\limits_l xdy - ydx,$ - площадь плоской фигуры D, ограниченной замкнутым контуром l (область D остается слева от пути интегрирования)
2. Пусть $F = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ - переменная сила, совершающая работу W вдоль пути l, тогда $W = \int\limits_l Pdx + Qdy + Rdz$

Формула Грина: Если кривая l замкнутая и ограничивает односвязную область $D \subset R^2$, и если функции $P(x, y),\ Q(x, y)$ непрерывно дифференцируемы в области D, то $\oint\limits_l Pdx + Qdy = \iint\limits_D \left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy,$ где направление движения вдоль кривой выбрано так, чтобы при движении точки по контуру l область D всё время оставалась слева (обход контура l против хода часовой стрелки).

Поверхностные интегралы

Поверхностные интегралы 1-ого рода

$z = z(x, y)$ $\qquad d\sigma = \dfrac{dxdy}{|\cos\gamma|} = \sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy$

$$\iint\limits_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma = \iint\limits_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy$$

Приложения поверхностных интегралов 1 рода:

1. $\sigma = \iint\limits_{\sigma} d\sigma$ - площадь поверхности σ
2. $m = \iint\limits_{\sigma} \mu(M) d\sigma$ - масса поверхности σ

Поверхностные интегралы 2-ого рода (интегралы по координатам) от векторного поля $\vec{a}(M)$ называют ***потоком*** векторного поля через поверхность σ: $\prod = \iint\limits_{\sigma} \vec{a} \cdot d\vec{\sigma}$.

$\prod = \iint\limits_{\sigma} \vec{a} \cdot d\vec{\sigma} = \iint\limits_{\sigma} (\vec{a}, \vec{n}_0) d\sigma$, где $\vec{n}_0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \pm \dfrac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$

Формула Гаусса-Остроградского Если поверхность σ является замкнутой поверхностью и ограничивает область V, то: $\prod = \oiint\limits_{\sigma} (\vec{a}, \vec{n}_0) d\sigma = \iiint\limits_{V} \left(\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz$,

т.е. $\boxed{\prod = \oiint\limits_{\sigma} (\vec{a}, \vec{n}_0) d\sigma = \iiint\limits_{V} div\ \vec{a} \cdot dV}$.

Пусть $\vec{a}(M) = P(x, y, z) \cdot \vec{i} + Q(x, y, z) \cdot \vec{j} + R(x, y, z) \cdot \vec{k}$

Циркуляцией векторного поля $\vec{a}$ вдоль замкнутого контура *l* называется криволинейный интеграл 2-ого рода от этого поля вдоль пути *l*: Ц=$\oint\limits_{l} \vec{a} \cdot d\vec{l}$, т.е. Ц=$\oint\limits_{l} Pdx + Qdy + Rdz$.

За положительное направление обхода замкнутой кривой *l* берётся направление движения против хода часовой стрелки, при котором область, ограниченная этой кривой, остаётся слева

Если $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$, $t_0 \le t \le t_1$, причем $x(t_0) = x(t_1),\ y(t_0) = y(t_1),\ z(t_0) = z(t_1)$,

то $Ц = \int\limits_{t_0}^{t_1} (P(x(t), y(t), z(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t)) y'(t) + R(x(t), y(t), z(t)) z'(t)) dt.$

Формула Стокса : Если координаты векторного поля $\vec{a} = (P, Q, R)$ непрерывно дифференцируемы в D и σ - произвольная ориентированная поверхность, натянутая на контур , то $\boxed{Ц = \oint\limits_{l} \vec{a} \cdot d\vec{l} = \iint\limits_{\sigma} (rot\ \vec{a}, \vec{n}_0) d\sigma}$,

то есть $Ц = \oint\limits_{l} Pdx + Qdy + Rdz =$

$= \iint\limits_{\sigma} \left[\left(\dfrac{\partial R}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\dfrac{\partial P}{\partial z} - \dfrac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma \right] d\sigma,$ где $\vec{n}_0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ - направляющие косинусы нормали к поверхности σ. Направление нормали $\vec{n}_0$ определяется так, чтобы со стороны нормали обход контура *l* казался происходящим против хода часовой стрелки.