**Парная регрессия**

1. $\overbar{x}=\frac{\sum\_{i=1}^{n}x\_{i}}{n} ; $ $\overbar{y}=\frac{\sum\_{i=1}^{n}y\_{i}}{n} ;$ $\overbar{xy}=\frac{\sum\_{i=1}^{n}x\_{i}y\_{i}}{n} ;$ $\overbar{x^{2}}=\frac{\sum\_{i=1}^{n}x\_{i}^{2}}{n} ; $ (3.7-3.10)
2. $σ\_{x}^{2}=\overbar{x^{2}}-\overbar{x}^{2}=\frac{\sum\_{i=1}^{n}x\_{i}^{2}}{n}-(\overbar{x})^{2}$ ; $cov\left(X,Y\right)=\overbar{xy}-\overbar{x} \overbar{y}$ (3. 14 -15)
3. Уравнение регрессии $\hat{y}=а+bx$ ;
4. (выборочный) коэффициент регрессии $b=\frac{\overbar{xy}-\overbar{x} \overbar{y}}{σ\_{x}^{2}}=\frac{cov(X,Y)}{σ\_{x}^{2}}$ ; $a=\overbar{y}-b\overbar{x}$ (3.11-13)
5. (выборочный) линейный коэффициент корреляции Пирсона

 $r=b\frac{σ\_{x}}{σ\_{y}}=\frac{cov(X,Y)}{σ\_{x}σ\_{y}}=\frac{n\sum\_{i=1}^{n}x\_{i}y\_{i}-\left(\sum\_{i=1}^{n}x\_{i}\right)\left(\sum\_{i=1}^{n}y\_{i}\right)}{\sqrt{n\sum\_{i=1}^{n}x\_{i}^{2}-\left(\sum\_{i=1}^{n}x\_{i}\right)^{2}}∙\sqrt{n\sum\_{i=1}^{n}y\_{i}^{2}-\left(\sum\_{i=1}^{n}y\_{i}\right)^{2}}}=\frac{\sum\_{i=2}^{n}e\_{i}e\_{i-1}}{\sum\_{i=1}^{n}e\_{i}^{2}}$ (3.17-20)

1. $Q=Q\_{R}+Q\_{e}$ ; $Q=\sum\_{i=1}^{n}\left(y\_{i}-\overbar{y}\right)^{2}=\sum\_{i=1}^{n}y\_{i}^{2}-\frac{\left(\sum\_{i=1}^{n}y\_{i}\right)^{2}}{n}$ =n$σ\_{y}^{2}$; (3.41-42)
2. $Q\_{R}=\sum\_{i=1}^{n}\left(\hat{y}\_{i}-\overbar{y}\right)^{2}$ ; $SSE=Q\_{e}=\sum\_{i=1}^{n}e\_{i}^{2}=\sum\_{i=1}^{n}\left(y\_{i}-\hat{y}\_{i}\right)^{2}=s^{2}(n-2)$ (3.41)
3. коэффициент детерминации $R^{2}=\frac{Q\_{R}}{Q}=1-\frac{Q\_{e}}{Q}=r^{2}=ρ^{2} $ для парной регрессии (3.47);
4. Индекс корреляции для нелинейной регрессии $ρ\_{xy}=\sqrt{1-\frac{Q\_{e}}{Q}}=\sqrt{1-\frac{\sum\_{i=1}^{n}\left(y\_{i}-\hat{y}\_{i}\right)^{2}}{\sum\_{}^{}\left(y\_{i}-\overbar{y}\right)^{2}}}$
5. Критерий значимости уравнения регрессии или коэффициента детерминации

 $ F\_{набл}=\frac{Q\_{R}(n-2)}{Q\_{e} }=\frac{R^{2}(n-2)}{\left(1-R^{2} \right)}>F\_{α;1;n-2} $ (3.48)

1. Остаточная дисперсия $s^{2}=\frac{\sum\_{i=1}^{n}(\hat{y}\_{i}-y\_{i})^{2}}{n-2}=\frac{Qe}{n-2}$ ; $ MSE=s=\sqrt{\frac{Qe}{n-2}}$ -стандартная ошибка
2. $s\_{r}=\frac{\sqrt{1-r^{2}}}{\sqrt{n-2}}$ Значимость коэффициента корреляции $\left|t\_{r}\right|=\frac{\left|r\right|}{s\_{r}}=\frac{\left|r\right|\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^{2}}}>t\_{α/2;n-2}$ (3.46)
3. Значимость коэффициентов уравнения регрессии ( $H\_{0}: a=0 (b= 0)$ ) станд.ошибка .коэфф

$s\_{a}=\frac{s\sqrt{\sum\_{i=1}^{n}\left(x\_{i}\right)^{2}}}{σ\_{x} n}$ ; $\left|t\_{a}\right|=\frac{\left|a\right|}{S\_{a}}>t\_{α/2;n-2} $; $s\_{b}=\frac{s}{\sqrt{\sum\_{i=1}^{n}\left(x\_{i}-\overbar{x}\right)^{2}}}=\frac{s}{\sqrt{\sum\_{i=1}^{n}x\_{i}^{2}-n\left(\overbar{x}\right)^{2}}}=\frac{s}{σ\_{x} \sqrt{n}}$ ; $\left|t\_{b}\right|=\frac{\left|b\right|}{S\_{b}}>t\_{α/2;n-2}$

Доверительные интервалы:

1. $s\_{\hat{y}}^{2}=s^{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{(x\_{0}-\overbar{x})^{2}}{\sum\_{i=1}^{n}(x\_{i}-\overbar{x})^{2}}\right)$ ; k=n-2; $\hat{y}-t\_{α/2;n-2}∙s\_{\hat{y}}^{ }\leq M\_{x}\left(Y\right)\leq \hat{y}+t\_{α/2;n-2}∙s\_{\hat{y}}^{ }$ (3.33-34)
2. $s\_{\hat{y\_{0}}}^{2}=s^{2}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{(x\_{0}-\overbar{x})^{2}}{\sum\_{i=1}^{n}(x\_{i}-\overbar{x})^{2}}\right)$ ; k=n-2; $\hat{y}\_{0}-t\_{α/2;n-2}∙s\_{\hat{y\_{0}}}^{ }\leq M\_{x}\left(Y\right)\leq \hat{y}\_{0}+t\_{α/2;n-2}∙s\_{\hat{y\_{0}}}^{ }$
3. $b-t\_{\frac{α}{2};n-2}∙s\_{b}\leq β\leq b+t\_{\frac{α}{2};n-2}∙s\_{b}$ (3.38)
4. $\frac{ns^{2}}{χ\_{^{α}/\_{2};k}^{2}}\leq σ^{2}\leq \frac{ns^{2}}{χ\_{^{1-α}/\_{2};k}^{2}}$ (3.39)
5. средняя ошибка аппроксимации $\overbar{A}=\frac{1}{n}\sum\_{}^{}\left|\frac{y\_{i}-\hat{y}\_{i}}{y\_{i}}\right|∙100\%$
6. коэффициент эластичности $\overbar{Э}=f'(\overbar{x})\frac{\overbar{x}}{\overbar{y}}$
7. Коэффициент ранговой корреляции Спирмена $ρ=1-\frac{6\sum\_{i=1}^{n}d\_{i}^{2}}{n^{3}-n}$ (3.49)
8. Значимость коэффициента ранговой корреляции Спирмена статистика $\left|t\right|=\frac{ρ\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-ρ^{2}}}>t\_{α;n-2}$ (3.50)

**Множественная регрессия**

1. Вектор коэффициентов уравнения регрессии $B=(X^{T}X)^{-1}X^{T}Y$ (4.8)

При m=2 $ b\_{1}=\frac{\sum\_{i}^{}\left(x\_{i1}-\overbar{x}\_{1}\right)\left(y\_{i}-\overbar{y}\right)∙\sum\_{i}^{}\left(x\_{i2}-\overbar{x}\_{2}\right)^{2} -\sum\_{i}^{}\left(x\_{i2}-\overbar{x}\_{2}\right)\left(y\_{i}-\overbar{y}\right)∙\sum\_{i}^{}\left(x\_{i1}-\overbar{x}\_{1}\right)(x\_{i2}-\overbar{x}\_{2}) }{\sum\_{i}^{}\left(x\_{i1}-\overbar{x}\_{1}\right)^{2}∙\sum\_{i}^{}\left(x\_{i2}-\overbar{x}\_{2}\right)^{2}-(\sum\_{i}^{}\left(x\_{i1}-\overbar{x}\_{1}\right)(x\_{i2}-\overbar{x}\_{2}))^{2}}$ ;

$b\_{2}=\frac{\sum\_{i}^{}\left(x\_{i2}-\overbar{x}\_{2}\right)\left(y\_{i}-\overbar{y}\right)∙\sum\_{i}^{}\left(x\_{i1}-\overbar{x}\_{1}\right)^{2} -\sum\_{i}^{}\left(x\_{i1}-\overbar{x}\_{1}\right)\left(y\_{i}-\overbar{y}\right)∙\sum\_{i}^{}\left(x\_{i1}-\overbar{x}\_{1}\right)(x\_{i2}-\overbar{x}\_{2}) }{\sum\_{i}^{}\left(x\_{i1}-\overbar{x}\_{1}\right)^{2}∙\sum\_{i}^{}\left(x\_{i2}-\overbar{x}\_{2}\right)^{2}-(\sum\_{i}^{}\left(x\_{i1}-\overbar{x}\_{1}\right)(x\_{i2}-\overbar{x}\_{2}))^{2}}$ ; $b\_{0}=\overbar{y}-b\_{1}\overbar{x}\_{1}-b\_{2}\overbar{x}\_{2}$

Коэффициенты стандартизированного уравнения ($b\_{0}=0$ ) ; 

1. Стандартная ошибка регрессии $s=\sqrt{\frac{\sum\_{}^{}e\_{i}^{2}}{n-m-1}}=\sqrt{\frac{Q\_{e}}{n-m-1}}$; станд.ошибка .коэфф $s\_{b\_{j}}=s\sqrt{\left[(X^{T}X)^{-1}\right]\_{jj}}$; При m=2 $ s\_{b\_{0}}^{2}=s^{2}(\frac{\left(\overbar{x}\_{1}\right)^{2}\sum\_{i}^{}\left(x\_{i2}-\overbar{x}\_{2}\right)^{2}+\left(\overbar{x}\_{2}\right)^{2}\sum\_{i}^{}\left(x\_{i1}-\overbar{x}\_{1}\right)^{2}-2\overbar{x}\_{1}\overbar{x}\_{2}\sum\_{i}^{}\left(x\_{i1}-\overbar{x}\_{1}\right)\left(x\_{i2}-\overbar{x}\_{2}\right)}{\sum\_{i}^{}\left(x\_{i1}-\overbar{x}\_{1}\right)^{2}∙\sum\_{i}^{}\left(x\_{i2}-\overbar{x}\_{2}\right)^{2}-\left(\sum\_{i}^{}\left(x\_{i1}-\overbar{x}\_{1}\right)\left(x\_{i2}-\overbar{x}\_{2}\right)\right)^{2}}+\frac{1}{n})$

$s\_{b\_{1}}^{2}=s^{2}\frac{\sum\_{i}^{}\left(x\_{i2}-\overbar{x}\_{2}\right)^{2}}{\sum\_{i}^{}\left(x\_{i1}-\overbar{x}\_{1}\right)^{2}∙\sum\_{i}^{}\left(x\_{i2}-\overbar{x}\_{2}\right)^{2}-\left(\sum\_{i}^{}\left(x\_{i1}-\overbar{x}\_{1}\right)\left(x\_{i2}-\overbar{x}\_{2}\right)\right)^{2}}$ ; $s\_{b\_{2}}^{2}=s^{2}\frac{\sum\_{i}^{}\left(x\_{i1}-\overbar{x}\_{1}\right)^{2}}{\sum\_{i}^{}\left(x\_{i1}-\overbar{x}\_{1}\right)^{2}∙\sum\_{i}^{}\left(x\_{i2}-\overbar{x}\_{2}\right)^{2}-\left(\sum\_{i}^{}\left(x\_{i1}-\overbar{x}\_{1}\right)\left(x\_{i2}-\overbar{x}\_{2}\right)\right)^{2}}$

1. Значимость коэффициентов уравнения регрессии cтатистика $\left|t\_{b\_{j}}\right|=\frac{\left|b\_{j}\right|}{S\_{b\_{j}}}>t\_{\frac{α}{2};n-m-1}$ (4.21-23)
2. Доверит интервалы коэффициентов уравнения регрессии $b\_{j}-t\_{\frac{α}{2};n-m-1}∙s\_{b\_{j}}\leq β\_{j}\leq b\_{j}+t\_{\frac{α}{2};n-m-1}∙s\_{b\_{j}}$
3. $Q=Q\_{R}+Q\_{e}=Y^{T} Y-n\overline{y}^{2}$ ; $Q\_{e}=Y^{T} Y-B^{T} X^{T} Y$; $Q\_{R}=B^{T} X^{T} Y-n\overline{y}^{2}$ (4.29-31)
4. Множественный коэффициент детерминации $R^{2}=\frac{Q\_{R}}{Q}=1-\frac{\sum\_{i=1}^{n}\left(y\_{i}-\hat{y}\_{i}\right)^{2}}{\sum\_{}^{}\left(y\_{i}-\overbar{y}\right)^{2}}=\frac{B^{T} X^{T} Y-n\overline{y}^{2} }{Y^{T} Y-n\overline{y}^{2}}$ (4.33);

скорректированный коэффициент детерминации $\hat{R}^{2}=1-\frac{n-1}{n-m-1}(1-R^{2})$ (4.34)

1. Критерий значимости уравнения регрессии: cтатистика $ F\_{набл}=\frac{Q\_{R}(n-m-1)}{Q\_{e} m}=\frac{R^{2}(n-m-1)}{\left(1-R^{2} \right)m}>F\_{α;m;n-m-1} $
2. Равенство коэффициентов детерминации ( $H\_{o}: R\_{1}^{2}=R\_{2}^{2})$ cтатистика$ F\_{набл}=\frac{(R\_{1}^{2}-R\_{2}^{2})(n-m-1)}{\left(1-R\_{1}^{2}\right)k}>F\_{α;k;n-m-1}$
3. Критерий Чоу ( $H\_{0}: параметры уравнений регрессии двух моделей равны $ )

$ F\_{набл}=\frac{\left(Q\_{1+2\_{e}}-Q\_{1\_{e}}-Q\_{2\_{e}}\right)(n\_{1}+n\_{2}-2m-2)}{\left(Q\_{1\_{e}}+Q\_{2\_{e}}\right)(m+1)}=\frac{\left(\sum\_{i=1}^{n}e\_{i}^{2}-\sum\_{i=1}^{n1}e\_{i}^{2}-\sum\_{i=n1}^{n2}e\_{i}^{2}\right)(n\_{1}+n\_{2}-2m-2)}{\left(\sum\_{i=1}^{n1}e\_{i}^{2}+\sum\_{i=n1}^{n2}e\_{i}^{2}\right)(m+1)}> F\_{α;m+1;n\_{1}+n\_{2}-2m-2}$

1. Тест Голдфенда-Квандта статистика $ F\_{набл}=\frac{Q\_{3\_{e}}}{Q\_{1\_{e}}}> F\_{α;к-m-1;к-m-1}$
2. Тест Дарбина-Уотсона ($H\_{0}: автокорреляция отсутствует $) статистика $DW=\frac{\sum\_{i=2}^{n}\left(e\_{i}-e\_{i-1}\right)^{2}}{\sum\_{i=1}^{n}e\_{i}^{2}}$

$d\_{в}<DW<4-d\_{в}$гипотеза об отсутствии автокорреляции принимается

$d\_{н}<DW<d\_{в} или 4-d\_{в}<DW<4-d\_{н}$ гипотеза не принимается и не отвергается

$0<DW<d\_{н}$ положительная автокорреляция

$4-d\_{н}<DW<4$ отрицательная автокорреляция

1. (выборочный) частный коэффициент корреляции $r\_{ij.12…m}=-\frac{A\_{ij}}{\sqrt{A\_{ii}A\_{jj}}}$ , $A\_{ij}-$ алгебраические дополнения соотв элементов матрицы выб коэфф корреляции (5.21); при m=3 $r\_{ij.k}=\frac{r\_{ij}-r\_{ik}r\_{jk}}{\sqrt{(1-r\_{ik}^{2})(1-r\_{jk}^{2})}}$
2. Средняя квадратическая ошибка $MSE=\frac{\sum\_{}^{}e\_{i}^{2}}{n}$
3. Среднее абсолютное отклонение $MAD=\frac{\sum\_{}^{}\left|e\_{i}\right|}{n}$
4. Метод экспоненциального сглаживания: $F\_{t+1}=∝∙Y\_{t}+\left(1-α\right)∙F\_{t}$ , $α \in (0;1)$
5. Метод экспоненциального сглаживания с поправкой на тренд:

 $FIT\_{t}=F\_{t}+T\_{t}$, $T\_{t}=(1-∙β)T\_{t-1}+β\left(F\_{t}-F\_{t-1}\right)$ , $α \in \left(0;1\right); β\in \left(0;1\right)$