

Ряды Тейлора и Лорана

Теорема 1. Функция $f(z)$, аналитическая в круге $|z - z_0| < R$, однозначно представима в этом круге своим рядом Тейлора

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

коэффициенты которого вычисляются по формулам:

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\substack{|z-z_0|=\rho \\ \rho < R}} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad n = 0, 1, \dots$$

Теорема 2. Функция $f(z)$, аналитическая в кольце $r < |z - z_0| < R$, единственным образом представима в этом кольце своим рядом Лорана

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

коэффициенты которого вычисляются по формулам:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\substack{|z-z_0|=\rho \\ \rho < R}} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} - \text{главная часть ряда Лорана,} \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n - \text{правильная часть ряда Лорана.}$$

Свойство. Ряды Тейлора и Лорана можно почленно интегрировать и дифференцировать в области сходимости.

Таблица разложений элементарных функций

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in C$$

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad z \in C$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad z \in C$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad z \in C$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad z \in C$$

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots + (-1)^n z^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \quad |z| < 1$$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1$$

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}, \quad |z| < 1$$

$$\ln(1-z) = -z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \dots - \frac{z^n}{n} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{z^n}{n}, \quad |z| < 1$$

Домашнее задание

Разложить функцию в ряд Тейлора в окрестности точки z_0 . Указать область сходимости полученного ряда

1. $f(z) = \ln(4 + 2z)$, 1) $z_0 = 0$, 2) $z_0 = -1$, 3) $z_0 = -3$

Разложить функцию в ряды Тейлора и Лорана по степеням $(z - z_0)$. Указать области сходимости полученных рядов.

1. $f(z) = \frac{1}{2z-3}$, 1) $z_0 = 0$, 2) $z_0 = 1$, 3) $z_0 = -2$

2. $f(z) = \frac{z^2}{z^2 + 9}$, $z_0 = 0$

Определить характер особенности в точке $z_0 = 0$, разложив функцию $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности этой точки и выделив главную часть полученного ряда. Найти вычет функции в изолированной особой точке.

(a) $f(z) = \frac{e^z}{z}$; $f(z) = \frac{e^z}{z^2}$; $f(z) = \frac{1-e^z}{z^3}$; $f(z) = \frac{e^{1/z}}{z}$; $f(z) = \frac{z^5 e^{1/z}}{5}$;

$f(z) = \frac{e^{-z}}{z^4}$; $f(z) = \frac{e^z}{2z^3}$; $f(z) = z^4 e^{\frac{3}{z}}$; $f(z) = e^{\frac{3}{z-2}}$; $f(z) = e^{\frac{1}{3-z}}$; $f(z) = e^{\frac{1}{z}} + 3z^2$;

$f(z) = z^3 e^{\frac{1}{z}}$

(б) $f(z) = \sin\left(\frac{1}{z}\right)$; $f(z) = \frac{1}{z^3} \sin(z^2)$; $f(z) = z \sin \frac{1}{z^2}$; $f(z) = \frac{\sin 2z}{z^5}$; $f(z) = \frac{\sin z^2}{z^2}$;

$f(z) = z^3 \sin \frac{2}{z^2}$; $f(z) = \frac{\sin 2z}{z}$; $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$

(в) $f(z) = \frac{1-\cos z}{z^2}$; $f(z) = z^3 \cos \frac{1}{z}$; $f(z) = \frac{\cos 2z}{z}$; $f(z) = \frac{\cos z^3}{z^7}$; $f(z) = z \cos \frac{2}{z^2}$;

$f(z) = z^3 \left(1 - \cos \frac{1}{z}\right)$; $f(z) = z \cos \frac{3}{z}$; $f(z) = \cos \frac{1}{z} + 5z^3$