

Задача о выборке.

всего

k	l
n	m

$$P = \frac{C_n^k \cdot C_m^l}{C_{n+m}^{k+l}}$$

1. В ящике 5 белых и 7 черных шаров. Достали 6 шаров. Найти вероятность того, что среди них ровно 2 белых.

Ответ: $p = \frac{25}{66} \approx 0,378$

2. В ящике a белых и b черных шаров ($a \geq 2$). Из него вынимают сразу 2 шара. Найти вероятность того, что оба шара будут белыми.

Ответ: $p = \frac{C_a^2 \cdot C_b^0}{C_{a+b}^2}$

3. В ящике a белых и b черных шаров. Из него вынимают сразу пять шаров. Найти вероятность того, что ровно два из них будут белыми.

Ответ: $p = \frac{C_a^2 \cdot C_b^3}{C_{a+b}^5}$

4. Федя пришел на экзамен, выучив 20 вопросов из 25. Найти вероятность того, что из 3 предложенных ему на экзамене вопросов он знает а) все 3; б) не меньше двух вопросов.

Ответ: а) $P = 57/115 \approx 0,495$ б) $P = 19/46 + 57/115 = 209/230 \approx 0,91$

5. В коробке лежат 15 карандашей, из них 7 красных. Найти вероятность того, что из 5 наудачу взятых карандашей а) ровно 3 красных; б) хотя бы три красных.

Ответ: а) $p = \frac{C_7^3 \cdot C_8^2}{C_{15}^5} = \frac{140}{429} \approx 0,326$ б) $p = \frac{C_7^3 \cdot C_8^2}{C_{15}^5} + \frac{C_7^4 \cdot C_8^1}{C_{15}^5} + \frac{C_7^5 \cdot C_8^0}{C_{15}^5} = \frac{140}{429} + \frac{40}{429} + \frac{1}{143} = \frac{61}{143} \approx 0,427$

6. У Феи есть 10 DVD с комедиями, 40 боевиков, 12 триллеров и 3 мелодрамы. Глаша наугад взяла 5 дисков. Найти вероятность того, что среди них а) нет триллеров б) есть хотя бы одна мелодрама.

Ответ: а) $P = \frac{C_{12}^0 \cdot C_{43}^5}{C_{60}^5} \approx 0,176$; б) $P = 1 - \frac{C_{12}^0 \cdot C_{57}^5}{C_{60}^5} = 1 - \frac{5247}{6844} = \frac{1597}{6844} \approx 0,233$

7. Имеются изделия четырех сортов, причем число изделий 1-го сорта равно 5, второго – 10, третьего – 15, четвертого – 5. Для контроля наудачу берутся несколько изделий. Определить вероятность того, что среди них 2 изделия первого сорта, 7 изделий второго сорта, 8- третьего, 3- четвертого.

8. Четверем игрокам раздали поровну 36 карт. Полагая все наборы розданных карт равновероятными, найти вероятности:

- 1) у первого игрока нет ни тузов, ни королей;
- 2) первый и второй игроки не получили тузов;
- 3) все тузы у первого игрока, а все короли у второго;
- 4) все тузы у одного из игроков;
- 5) у первого игрока есть хотя бы один туз.

8. В ящике находятся три красных и один зеленый шар. Вы наугад вынимаете из ящика два шара. Какая вероятность больше – вынуть два красных шара или вынуть красный и зеленый шары?

9. Известно, что пять из 40 пассажиров корабля причастны к похищению бриллиантов и везут их с собой. Инспектор полиции попросил разрешения обыскать шесть наугад выбранных пассажиров. Какова вероятность обнаружить при этом хотя бы одного преступника?

Ответ: $p = 0,5771$

9. В конверте среди 100 фотокарточек находится одна разыскиваемая. Из конверта наудачу извлечены 10 карточек. Найти вероятность того, что среди них окажется нужная.

10. В ящике 100 деталей, из них 10 бракованных. Наудачу извлечены 4 детали. Найти вероятность того, что среди них 1) нет бракованных; 2) нет годных.

11. Из урны, содержащей 5 белых, 4 черных и 3 красных шара достают 6 шаров. Найти вероятность того, что среди них ровно 2 белых, 3 черных и один красный.
12. В группе 20 студентов, из которых 8 отличников и 5 хорошистов. По списку наудачу отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов а) ровно 5 отличников и 2 хорошиста, б) не меньше 7 отличников, в) не больше двух хорошистов.
13. Глаша пришла на экзамен, выучив 20 вопросов из 30. В билете 5 вопросов. Найти вероятности следующих событий: а) Глаша знает все вопросы в билете б) Глаша не знает ни одного вопроса в) Глаша знает хотя бы 3 вопроса.
14. На стеллаже в библиотеке в случайном порядке расставлено 15 учебников, причем 5 из них в переплете. Библиотекарь берет наудачу 3 учебника. Найти вероятность того, что а) ровно один из взятых учебников окажется в переплете; б) хотя бы один; в) ровно два; г) не больше двух.
15. Предположим, что 18 главных компьютерных компаний находятся в США, из которых 12 расположены в Силиконовой долине в Калифорнии. Если 3 компьютерных компании выбираются случайно из всего списка, то определить вероятность того, что одна или более расположены в Силиконовой долине.
16. Колода из 52 карт раздается поровну четверым игрокам. Найти вероятность того, что у одного из игроков все 13 карт будут одной масти.
17. Из колоды 36 карт, достают 4 карты (без возвращения), какова вероятность, что среди них будут либо 2 красных, либо 2 дамы.
18. Играющим в преферанс раздают по 10 карт и две в прикупе. Какова вероятность, что в прикупе король и туз одной масти?
19. При проведении фуршета на стол поставили 10 бокалов с шампанским, 5 бокалов с красным вином и пять бокалов с белым вином. Подошедшие гости разобрали все бокалы, кроме трех. Найти вероятность того, что а) все оставшиеся бокалы с белым вином; б) остался хотя бы один бокал с шампанским; в) остались 2 бокала с красным вином и один с белым.
20. Каждый из 50 штатов США представлен двумя сенаторами. В комитет по делам индейцев выбирают пять человек. Какова вероятность того, что там будет хотя бы один представитель Аляски?
21. В чулане 5 пар ботинок. Из них случайно выбирают 4 ботинка. Найти вероятность того, что среди выбранных ботинок 1) нет парных; 2) имеется ровно 1 пара.
22. В коллекции 8 монет, 4 из которых старинные. Наудачу выбираются 3 монеты. Какова вероятность того, что среди них а) 2 старинные; б) все старинные; в) не менее двух старинных монет
23. В группе 7 девушек и 10 юношей. Для тестирования случайным образом выбирают 5 студентов. Найти вероятность того, что для тестирования выбраны : а) три девушки; б) хотя бы три девушки
24. В коробке 12 деталей. Из них 6 – стандартные, 4 – отличного качества, остальные – бракованные. Какова вероятность того, что среди семи отобранных деталей а) одна отличного качества и пять стандартных; б) только годные детали
25. В партии из 17 телевизоров пять- марки «Рубин». Наугад отобраны 7 телевизоров. Найти вероятность того, что среди них : а) два телевизора марки «Рубин»; б) менее двух «Рубинов»; в) хотя бы один «Рубин»
26. В розыгрыше лотереи участвуют 20 шаров, обозначенных числами от 1 до 20. Случайно отбирается 8 различных шаров. Найти вероятность того, что числа на выпавших шарах окажутся: а) все четными; б) все нечетными; в) 5 четных г) не более четырех нечетных
27. В партии изделий 90 исправных и 10 бракованных. Найти вероятность того, что среди 10 проданных изделий ровно 2 бракованных 2) нет бракованных

Формула Бернулли

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

1. Производится 3 выстрела по мишени. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,75. Найти вероятность того, что за три выстрела будет ровно 2 попадания.
2. В урне 20 белых и 10 черных шаров. Вынули подряд 4 шара, причем каждый вынутый шар возвращают в урну перед извлечением следующего и шары в урне перемешивают. Какова вероятность, что из четырех вынутых шаров окажется ровно 2 белых?
3. Передается сообщение из 6 символов. Вероятность ошибки при передаче одного символа равна 0.1. Найти вероятность того, что из 6 символов ровно 4 переданы без ошибки. Вероятность того, что не более трех символов с ошибкой.
4. Два равносильных противника играют в шахматы. Что вероятнее: 1) выиграть одну партию из двух, или две из четырех; 2) выиграть не менее двух партий из четырех, или не менее трех партий из пяти? 3) выиграть 2 партии из 4 или 3 из 6? Ничьи во внимание не принимаются.
5. Найти вероятность того, что при бросании 6 игральных костей "1" выпадет 1) ровно 1 раз; 2) ровно 2 раза; 3) по крайней мере, 1 раз; 4) не более 2-х раз.
6. Монета подбрасывается до тех пор, пока герб не выпадет 7 раз. Найти вероятность того, что будет произведено 14 бросков. Ответ: $P(A) = p \cdot C_{13}^6 p^6 q^7 = \frac{429}{4096}$
7. В семье пять детей. Найти вероятность того, что среди этих детей: 1) два мальчика; 2) не более двух мальчиков; 3) более двух мальчиков. Вероятность рождения мальчика принять равной 0,51.
8. Из партии изделий товаровед отбирает изделия высшего сорта. Вероятность того, что наудачу взятое изделие окажется высшего сорта, равна 0,8. Найти вероятность того, что из трех проверенных изделий 1) только два изделия высшего сорта 2) не менее двух таких изделий.
9. Известно, что в среднем 5% изделий некоторой фирмы бракованные. Взяли наугад на проверку 2 изделия. Какова вероятность того, что ровно одно из этих двух изделий будет забраковано? Хотя бы одно? Не меньше одного?
10. Три монеты подбросили 10 раз. Найти вероятность того, что 3 "герба" появятся в 5 испытаниях.
11. В цехе 6 моторов. Для каждого мотора вероятность, что он в данный момент включен, равна 0,8. Найти вероятность того, что в данный момент 1) включено 4 мотора; 2) включен хотя бы 1 мотор.
12. Самолет может лететь, когда у него работает не меньше половины моторов. Вероятность поломки одного мотора равна 0,01. Какой самолет предпочесть: 2-х моторный или 4-х моторный?
13. Вероятность брака при производстве приборов составляет 10%. С какой вероятностью среди 6 приборов, взятых для контроля, окажется ровно 2 бракованных?
14. Студент может правильно решить задачу из контрольной работы с вероятностью 0,3. Какова вероятность того, что из предложенных шести задач варианта он решит ровно 4 задачи?
15. Из колоды в 36 карт 7 раз подряд наудачу выбирают карту, всякий раз возвращая её в колоду. С какой вероятностью ровно 5 из выбранных карт будут пиковой масти?
16. В брокерской конторе применяется следующая система оплаты: если сотрудник не выполняет установленную норму прибыли более 3-х дней из двух рабочих недель (10 дней), его лишают премии; если не выполняет норму более 8-ми дней – его увольняют. Вероятность того, что не очень опытный сотрудник выполнит норму, равна 0,65. Сейчас работает 20 не очень опытных сотрудников. Оцените, сколько из них получают премию, а сколько будут уволены.
17. Игральная кость подбрасывается до тех пор, пока не выпадет 6 раз число очков, отличное от 5. Какова вероятность, что будет произведено 9 бросков? Ответ: $P(A) = \frac{875000}{10077696} \approx 0,0868$
18. Пара одинаковых игральных костей бросается 7 раз. Найти вероятность того, что каждый раз выпадает сумма очков больше семи.
19. Сколько раз нужно бросить игральную кость, чтобы с вероятностью, меньшей 0.3, можно было ожидать, что не появится 6 очков?
20. Батарея произвела шесть выстрелов по объекту. Вероятность попадания в объект при одном выстреле равна 0,3. Найти вероятность того, что объект будет разрушен, если для этого достаточно хотя бы двух попаданий. Ответ: 0,58

Наивероятнейшее число наступлений события.

Число m_0 называется *наивероятнейшим числом наступлений события* A в n испытаниях, если вероятность того, что событие A наступит ровно m_0 раз больше или равна остальным значениям вероятностей: $P_n(m_0) \geq P_n(k)$.

Если $p \neq 0$ и $p \neq 1$, то число m_0 можно найти из двойного неравенства: $np - q \leq m_0 \leq np + p$.

- Вероятность попадания стрелком в цель равна 0,7. Сделано 25 выстрелов. Найти а) наивероятнейшее число попаданий в цель; б) вероятность наивероятнейшего числа попаданий.
- Решение. $n = 25$, $p = 0,7$, $q = 0,3$. Тогда $25 \cdot 0,7 - 0,3 \leq m_0 \leq 25 \cdot 0,7 + 0,7$, т.е. $17,2 \leq m_0 \leq 18,2 \Rightarrow m_0 = 18$. Ответ: 18.
- В урне 10 белых и 40 черных шаров. Вынимают подряд 14 шаров, причем цвет вынутого шара регистрируют, а затем шар возвращают в урну. Определить а) наивероятнейшее число появлений белого шара; б) вероятность наивероятнейшего числа появлений. Ответ: $m_0 = 2$; $m_0 = 3$
- В результате многолетних наблюдений установлено, что вероятность выпадения дождя 1 октября в данном городе равна $1/7$. Определить наивероятнейшее число дождливых дней 1 октября в данном городе за 40 лет. Ответ: $m_0 = 5$.
- Стоимость проезда в автобусе равна 25 рублей, месячный проездной билет стоит 650 руб., а штраф за безбилетный проезд составляет 150 руб. Петя 24 раза в месяц ездит на автобусе в институт и обратно. Он не покупает проездного билета, не платит за проезд и считает, что вероятность быть пойманным и заплатить штраф, равна 0,1. Сравнить стоимость проездного билета с наиболее вероятной суммой штрафа.
- Батарея произвела шесть выстрелов по объекту. Вероятность попадания в объект при одном выстреле равна 0,3. Найти а) наивероятнейшее число попаданий; б) вероятность наивероятнейшего числа попаданий; в) вероятность того, что объект будет разрушен, если для этого достаточно хотя бы двух попаданий. Ответ: $m_0 = 2$; $P_6(2) = 0,324$; $p = 0,58$.
- Чему равна вероятность p наступления события в каждом из 39 независимых испытаний, если наивероятнейшее число наступлений события в этих испытаниях равно 25?
- В урне 7 белых и 8 черных шаров. Наугад вынули 5 шаров. Найти вероятность того, что среди них ровно 3 белых и 2 черных. Рассмотреть случаи с возвращением и без возвращения.
- Определить число повторных независимых испытаний, которые надо произвести, чтобы наивероятнейшее число появления события было равно 20, если вероятность появления этого события при каждом испытании, равна 0,8.

Приближенные формулы Лапласа и Пуассона.

1. Товаровед проверяет 25 образцов товаров. Вероятность, что каждый из образцов окажется годным к продаже, равна 0.98 . . Найти вероятность того, что среди проверенных образцов окажется : а) ровно 7 бракованных; б) ровно 7 годных; в) хотя бы один бракованный; г) не менее трех годных
2. При автоматическом изготовлении деталей допускается в среднем 5% брака. Какова вероятность того, что среди взятых для контроля 16 деталей: а) не окажется ни одной бракованной; б) окажется одна бракованная; в) окажется не более 15 бракованных
3. Станок производит в среднем 1% брака. Найти вероятность того, что среди 300 наудачу выбранных деталей: а) 5 бракованных; б) не менее трех бракованных; в) 298 годных
4. Найти вероятность того, что событие А наступит ровно 70 раз в 243 испытаниях, если вероятность появления события А в каждом испытании равна 0.25 .
5. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0.8 . Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена ровно 75 раз. Ответ: 0.046
6. Вероятность рождения мальчика равна 0.51 . Найти вероятность того, что среди 100 новорожденных окажется 50 мальчиков. Ответ: 0.0782
7. Вероятность появления события в каждом из 100 независимых испытаний постоянна и равна 0.8 . Найти вероятность того, что событие появится: а) не менее 75 раз и не более 90 раз; б) не менее 75 раз; в) не более 74 раз.
8. Вероятность появления события в каждом из 210 независимых испытаний постоянна и равна 0.7 . Найти вероятность того, что событие появится: а) не менее 140 раз и не более 150 раз; б) не менее 140 раз; в) не более 139 раз
9. Вероятность появления события в каждом из 21 независимых испытаний равна 0.8 . Найти вероятность того, что событие появится в большинстве испытаний
10. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0.8 . Сколько нужно произвести испытаний, чтобы с вероятностью 0.9 можно было ожидать, что событие появится не менее 75 раз?
11. Вероятность появления события в каждом из 21 независимых испытаний равна 0.8 . Найти вероятность того, что событие появится в большинстве испытаний
12. Вероятность появления события в каждом из 625 независимых испытаний равна 0.8 . Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более, чем на 0.04 .
13. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0.5 . Найти число испытаний, при котором с вероятностью 0.7698 можно ожидать, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более, чем на 0.02
14. Событие А – при двух бросках кубика сумма очков больше 10. Какова вероятность того, что относительная частота появления события А при 80 сериях бросков отличается от вероятности его появления менее, чем на 0.2 ?
15. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0.2 . Найти наименьшее число испытаний, при котором с вероятностью 0.99 можно ожидать, что относительная частота появлений события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более, чем на 0.04 .
16. В урне содержатся белые и черные шары в отношении 4:1 . После извлечения шара регистрируется его цвет и шар возвращается в урну. Чему равно наименьшее число извлечений, при котором с вероятностью 0.95 можно ожидать, что абсолютная величина отклонения относительной частоты появления белого шара от его вероятности будет не более чем 0.01?
17. Французский ученый Бюффон бросил монету 4040 раз, причем «герб» появился 2048 раз. Найти вероятность того, что при повторении опыта Бюффона относительная частота появления «герба» отклонится от вероятности появления «герба» по абсолютной величине не более, чем в опыте Бюффона.