

Классическое определение вероятности

Вероятность события $p(A) = \frac{m}{n}, 0 \leq p \leq 1$

где m - число исходов испытаний, благоприятных A

n – общее число возможных исходов испытаний (исходы равновозможны и образуют полное пространство событий)

1. Брошены 3 монеты. Найти вероятность того, что
а) одна упала «гербом» вверх
б) выпало два «герба» в) выпало не больше двух «гербов» г) первая упала «гербом» вверх
д) хотя бы одна упала «гербом» вверх
2. Брошены 2 игральные кости. Найти вероятность того, что
а) сумма выпавших очков не больше 6 б) хотя бы на одной кости выпало 3 очка.
3. Бросаем n костей. Найти вероятность того, что на всех костях выпадет одинаковое число очков.
4. В некотором городе происходит 7 катастроф в неделю. Найти вероятность того, что каждый день происходит одна катастрофа.
5. n шаров случайным образом раскладывают по n ящикам. Найти вероятность того, что каждый ящик будет занят.
6. На каждой из 4 карточек напечатана одна из 4 букв У, О, Р, Т. Найти вероятность того, что на карточках, расположенных в произвольном порядке, можно будет прочесть слово УТРО.
б) Ш, А, А, К – слово КАША в) М, Л, К, О, О, О – слово МОЛОКО.
7. Ребенок, играя кубиками, на которых написаны буквы М, М, Т, Т, А, А, А, К, И, Е сложил слово МАТЕМАТИКА. Можно ли считать, что ребенок грамотный?
8. Колода из 36 карт хорошо перемешана (все возможные расположения карт равновероятны). Найти вероятность того, что все тузы расположены рядом.

Сумма и произведение событий. Сложение и умножение вероятностей

1. ОТК проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие стандартно, равна 0.9. Найти вероятность того, что из двух проверенных изделий : а) только одно стандартное; б) оба изделия стандартны; в) хотя бы одно изделие стандартно.
2. (№51) 2 стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0.7, а для второго – 0.8. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадет а) только один из стрелков ; б) хотя бы один из стрелков.
3. (№64) В читальном зале имеется 7 учебников по теории вероятностей, из которых 3 в переплете. Библиотекарь наудачу берет 2 учебника. Найти вероятность того, что оба учебника окажутся в переплете.
4. В первой корзине 5 яблок, 11 груш и 8 апельсинов, а во второй 8 яблок, 10 груш и 7 апельсинов. Из каждой корзины наугад берут по одному фрукту. Какова вероятность того, что фрукты одинаковы?
5. (№81) Устройство содержит два независимо работающих элемента, вероятности отказа которых равны 0.05 и 0.08 соответственно. Найти вероятность того, что устройство откажет, если для этого достаточно, чтобы отказал хотя бы один элемент.
6. (№85) Вероятность попадания в мишень каждым из двух стрелков равна 0.3. Стрелки стреляют по очереди, каждый по два выстрела. Попавший в мишень первым, получает приз. Найти вероятность того, что стрелки получают приз.

7. (№86) Вероятность хотя бы одного попадания стрелком в мишень при трех выстрелах равна 0.973 . Найти вероятность попадания при одном выстреле.

Задача о выборке

N- всего элементов

n- число элементов первого сорта

m- общее число выбранных элементов

k- число выбранных элементов первого сорта

Вероятность того, что из m выбранных элементов ровно k элементов первого сорта

$$P = \frac{C_n^k C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m}, \quad C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \quad C_n^n = C_n^0 = 1; \quad C_n^{n-1} = C_n^1 = n$$

1. В ящике 5 белых и 7 черных шаров. Из ящика вынимают 6 шаров. Найти вероятность того, что среди них : а) ровно 2 белых ; б) нет белых в) хотя бы один белый шар.
2. В коллекции 8 монет, 4 из которых старинные. Наудачу выбираются 3 монеты. Какова вероятность того , что среди них а) 2 старинные; б) все старинные; в) не менее двух старинных монет .
3. В группе 7 девушек и 10 юношей. Для тестирования случайным образом выбирают 5 студентов. Найти вероятность того, что для тестирования выбраны : а) три девушки; б) хотя бы три девушки.
4. Студент выучил 20 вопросов из 25. Найти вероятность того, что из 3 предложенных вопросов он знает: а) все три б) хотя бы один в) не менее двух.
5. В коробке 12 деталей. Из них 6 – стандартные, 4 – отличного качества, остальные – бракованные. Какова вероятность того, что среди семи отобранных деталей а) одна отличного качества и пять стандартных; б) только годные детали.
6. Четирем игрокам раздали поровну 36 карт. Полагая все наборы карт равновероятными, найти вероятности: а) у первого игрока нет ни тузов, ни королей б) все тузы у одного из игроков в) у первого игрока есть хотя бы 1 туз г) первый и второй игроки не получили тузов д) (±) все тузы у первого игрока, а все короли- у второго

Формула Бернулли

Производится n независимых испытаний, в каждом из которых **вероятность появления события A одна и та же** и равна p .

Вероятность того, что событие A появится в n испытаниях ровно k раз $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$

Если **число испытаний n велико**, а **вероятность появления одного события p мала**, то вероятность того, что событие A появится в n испытаниях ровно k раз, можно вычислять по

формуле Пуассона

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}; \quad \lambda = np$$

1. В ящике 20 белых и 10 черных шаров. Вынули подряд 4 шара, причем каждый вынутый шар возвращают в ящик перед извлечением следующего и шары в ящике перемешивают. Какова вероятность того, что из 4 вынутых шаров окажется ровно 2 белых?
2. Производится 3 выстрела по мишени. Вероятность попадания при одном выстреле 0.75. Найти вероятность того, что за 3 выстрела будет: а) 2 попадания; б) менее двух попаданий; в) хотя бы одно попадание.
3. Два равносильных противника играют в шахматы. Что вероятнее: выиграть 2 партии из 4 или 3 из 6 (ничьи не учитываются)?
4. Найти вероятность того, что при бросании восьми костей «1» выпадет: а) ровно 1 раз б) ровно 4 раза в) по крайней мере 1 раз
5. Станок производит в среднем 1% брака. Найти вероятность того, что среди 300 наудачу выбранных деталей: а) 5 бракованных; б) не менее трех бракованных; в) 298 годных

Формула полной вероятности

Вероятность события A , которое может наступить лишь при появлении одного из несовместных событий (гипотез) $H_1, H_2, \dots, H_n$, образующих полную группу событий (то есть $P(H_1) + P(H_2) + \dots + P(H_n) = 1$)

равна $P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + \dots + P(H_n) \cdot P(A|H_n)$

1. (№89) В ящик, содержащий 2 шара, опущен белый шар, после чего наудачу извлечен один шар. Найти вероятность того, что извлеченный шар окажется белым, если равновозможны все возможные предположения о первоначальном составе шаров по цвету.
2. (№32) Прибор может работать в двух режимах: нормальном и ненормальном. Нормальный режим наблюдается в 80% всех случаев работы прибора. Вероятность выхода прибора из строя за время t в нормальном режиме равна 0.1, а в ненормальном – 0.7. Найти вероятность выхода прибора из строя за время t .
3. Приборы одного наименования изготавливаются тремя заводами. Первый завод поставляет 2/3 всех приборов, второй и третий – одинаковое количество оставшихся. Надежность прибора, выпускаемого первым заводом, равна 0.7, вторым – 0.6, третьим – 0.8. Найти полную надежность прибора.
4. В двух ящиках имеется по 15 деталей, из которых по 3 бракованных, в третьем 20 деталей, из которых 2 бракованных. Какова вероятность взять бракованную деталь из наудачу выбранного ящика?
5. В ящике хранятся детали, изготовленные на трех станках. Производительности станков относятся как 3:3:4. При этом первый станок производит 10% бракованных деталей, а второй и третий по 15% бракованных деталей. Какова вероятность наудачу достать бракованную деталь из ящика?

6. Имеются 2 ящика: в первом 4 белых и 6 черных шаров, а во втором 7 белых и 5 черных. Из первого ящика во второй перекладывают, не глядя, 1 шар. После этого из второго ящика достают один шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

Формула Байеса

Пусть событие A может наступить лишь при появлении одного из несовместных событий (гипотез) $H_1, H_2, \dots, H_n$, образующих полную группу событий (то есть $P(H_1) + P(H_2) + \dots + P(H_n) = 1$). Если событие A уже произошло, то вероятности гипотез вычисляются по формулам Байеса (в знаменателе — формула

полной вероятности)

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A|H_i)}{P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + \dots + P(H_n) \cdot P(A|H_n)}$$

1. (№97) 2 автомата производят одинаковые детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность первого автомата вдвое больше, чем второго. Первый автомат производит в среднем 60% деталей отличного качества, а второй — 84%. Наудачу взятая деталь оказалась отличного качества. Найти вероятность того, что эта деталь произведена вторым автоматом.
2. (№98) В пирамиде 10 винтовок, из которых 4 снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0.9; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0.7. Стрелок поразил эту мишень из наудачу взятой винтовки. Что вероятнее: стрелок стрелял из винтовки с оптическим прицелом или без него?

Геометрическая вероятность

1. На отрезке длины 30 см помещен меньший отрезок длины 10 см. Найти вероятность того, что точка, наудачу поставленная на больший отрезок, попадет также на меньший отрезок.
2. В круг радиуса R помещен меньший круг радиуса r . Найти вероятность того, что точка, наудачу брошенная в большой круг, попадет также: а) и в малый круг; б) в кольцо, образованное построенными окружностями.
3. В сферу радиуса R вписан куб. . Найти вероятность того, что точка, наудачу брошенная в сферу, попадет также в куб:
3. На отрезке OA длины L числовой оси Ox наудачу поставлены 2 точки $B(x)$ и $C(y)$, причем $y \geq x$. Найти вероятность того, что длина отрезка BC меньше длины отрезка OB .
4. Наудачу выбирают числа x и y такие, что $x \in [0; 2]$; $y \in [0; 1]$. Какова вероятность того, что: а) $x \leq \frac{1}{3}$; $y \geq \frac{2}{3}$ б) $y \geq 2x$; в) $\min(2x, 3y) \leq 2$ г) $xy \geq \frac{3}{5}$
5. 2 незнакомых мафиози пытаются убить друг друга. Первый приходит к месту встречи от 12 до 13 часов, мгновенно и незаметно оставляет мину, которая взорвется через 10 мин, ждет 5 мин и уходит. Второй также приходит от 12 до 13, оставляет свою мину, которая взорвется через 15 мин, ждет 10 мин и уходит. Какова вероятность того, что: а) мафиози встретятся; б) второй погибнет?