Сети Петри

Основные определения

Определение 1. ***Сетью Петри*** называется совокупность множеств $C = \{ P, T, I, O\}$, где:

P – конечное множество, элементы которого называются позициями;

T – конечное множество, элементы которого называются переходами, $P \cap T = \emptyset$;

I - множество входных функций, $I: T \to P$;

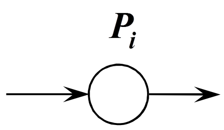
O – множество выходных функций, $O: T \to P$.

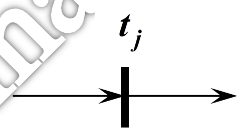
Сети Петри используются главным образом для моделирования параллельных процессов: для моделирования компонентов компьютера, параллельных вычислений, в робототехнике и даже для описания музыкальных структур. Вообще, сети Петри используют для нахождения дефектов в проекте системы, хотя имеют и многие другие применения. Они обладают многими свойствами блок-схем и конечных автоматов.

Сети Петри были разработаны и используются для моделирования параллельных и асинхронных систем. При моделировании в сетях Петри позиции символизируют какое-либо состояние системы, а переход символизируют какие-то действия, происходящие в системе. Система, находясь в каком-то состоянии, может порождать определенные действия, и наоборот, выполнение какого-то действия переводит систему из одного состояния в другое.

Сети Петри - математическая модель дискретных динамических систем, в том числе информационных систем (параллельных программ, операционных систем, ЭВМ и их устройств, сетей ЭВМ), ориентированная на качественный анализ и синтез таких систем

Сети Петри удобно изображать ориентированными графами. Вершинами орграфа являются позиции и переходы, обычно позиции в сети Петри обозначены кружком, а переходы – вертикальной линией:





изображение позиции; изображение перехода.

Ориентированные дуги могут соединять только позиции и переходы. Так как множества позиций и переходов не пересекаются, граф является двудольным. Сеть Петри является мультиграфом, так как допускается кратность дуг между позициями и переходами (вершинами графа). Если число дуг велико, обычно указывается только одна дуга, сверху помечается количество. Ориентация ребер допускается в обоих направлениях. Входным функциям соответствуют дуги от позиции к переходу (такие позиции называются ***входами*** перехода), выходным – в обратную сторону(такие дуги определяют ***выходные позиции*** перехода).

Определение 2. Сеть Петри называется ***маркированной***, если существует функция μ, называемая ***маркировкой (разметкой) сети***, которая ставит в соответствие неотрицательное целое число каждому элементу множества P. Если p – позиция, то $\mu(p)$ называется ***разметкой позиции*** p.
Таким образом, маркированная сеть Петри задается пятеркой $C_\mu = \{ P, T, I, O, \mu\}$, где μ – целочисленный вектор $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots \mu_n)$, $n = |P|$, $\mu_i = \mu(p_i)$, $i = \overline{1..n}$.

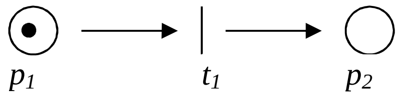
Разметка множества на графе указывается с помощью черных точек, называемых ***метками (фишками)***, помещенных в кружки, которые обозначают позиции. Количество меток можно также указывать числом, записанном в кружке. Если кружок позиции p пуст, это означает, что в p меток нет. Маркировка сети Петри аналогична состоянию конечного автомата.

При моделировании гибких производственных систем позиции отражают отдельные операции производственного процесса (например: транспортировка заготовки к конвейеру, передвижение заготовки к станку конвейером, обработку детали) или состояния компонентов гибкой производственной системы (например: робота, конвейера, станка). Наличие метки в одной из позиций соответствует состоянию выполнения некоторой из технологических операций либо состояние, в котором пребывают некоторые из компонентов гибкой производственной системы.

Переходы соответствуют событиям, отображающим начало или завершение моделируемых операций. Например, переход интерпретируется как событие, связанное с завершением операции транспортирования заготовки роботом и ее установки на конвейере, а также с началом операции перемещения заготовки конвейером к станку.

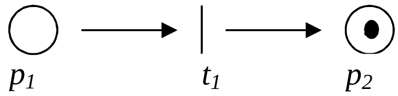
С помощью сетей Петри можно реализовать модель автомата Мили. При этом входные и выходные символы, а также состояния автомата моделируются позициями, а переходы моделируют события, состоящие в обеспечении маркировки позиций, соответствующих следующему состоянию и значениям выходных переменных, на основе маркировки позиций, соответствующих настоящему состоянию и значениям входов. Достоинство такой модели состоит в том, что она позволяет весьма просто осуществить композицию таких моделей, однако ее громоздкость, связанная с представлением значений входов и выходов позициями, практически исключает применение традиционных сетей Петри для реализации автоматов.

Рассмотрим граф :



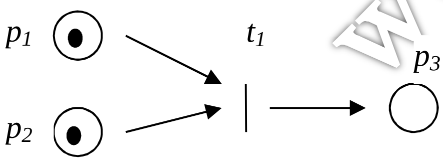
В этой сети Петри P={p_1; p_2 };T={ t_1 };I(t_1)={ p_1 }; O(t_1)= {p_2 }; μ =(1;0).

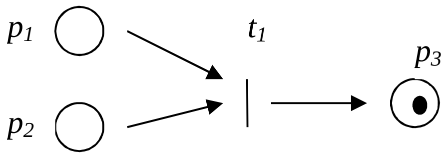
Действия в сети отображаются срабатываниями переходов. Срабатывание перехода t означает удаление по одной метке из каждой позиции p_i, если существует дуга из p_i в t, и добавление метки в каждую позицию p_j , если имеется дуга из t в p_j. Например, срабатывание t_1 из предыдущего примера приводит к такой сети Петри:



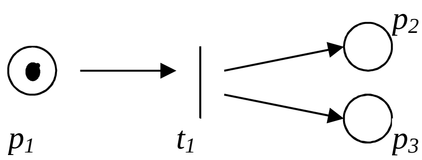
Срабатывание каждого перехода меняет маркировку сети. Новая маркировка μ' =(0;1).

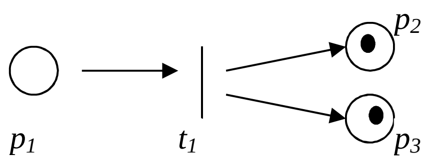
Аналогично, срабатывание перехода t_1 для сети $C_{\mu 1}$ ={ P,T,I,O,μ}, P={p_1; p_2 ; p_3 };T={ t_1 }; I(t_1)= {p_1; p_2 } ; O(t_1)= p_3 ; μ =(1;1;0) даст такую маркировку: μ' =(0;0;1)





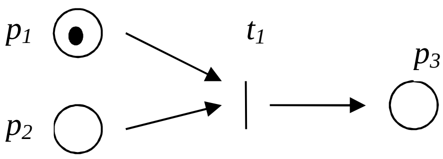
$C_{\mu 2}$ ={ P,T,I,O,μ}, P={p_1; p_2 ; p_3 };T={ t_1 }; I(t_1)= {p_1 } ; O(t_1)= { p_2;p_3 }; μ =(1;0;0); μ' =(0;1;1)





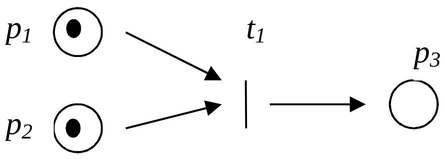
Определение 3. Переход называется ***разрешенным***, если каждая из его входных позиций имеет число меток не меньше, чем число дуг из позиции в переход.

Переход срабатывает только в том случае, когда он разрешен**.**



Переход t_1 не может сработать, поскольку в p_2 нет метки. Он будет разрешен, если p_1 и p_2 будут иметь хотя бы по одной метке:

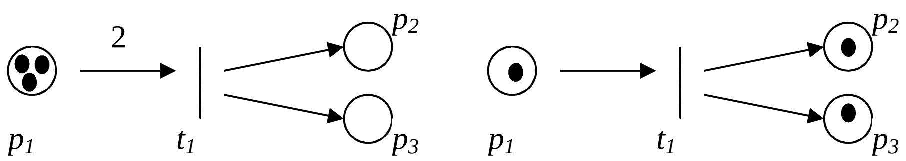
www.matematem.ru



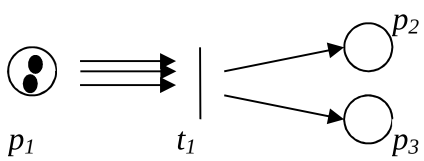
Кратные метки необходимы для кратных входных дуг. Метки во входной позиции, которые разрешают переход, называются его ***разрешающими метками***.

В результате срабатывания во всех входных позициях перехода число меток уменьшается на величину, равную числу дуг, выходящих из соответствующей позиции в переход, а в выходные позиции данного перехода добавляется число меток, равное числу дуг, исходящих из перехода в соответствующую выходную позицию. Заметим, что срабатывание перехода и изменение маркировок всех связанных с данным переходом позиций осуществляется мгновенно. Если в некоторый момент времени разрешен более чем один переход, первым может сработать любой из них. Например, если моделируются несколько процессоров, использующих общую периферию, то неизвестно, когда одному из процессоров понадобится периферийное устройство. Сети Петри можно использовать для проверки работоспособности системы и в условиях такой неопределенности.

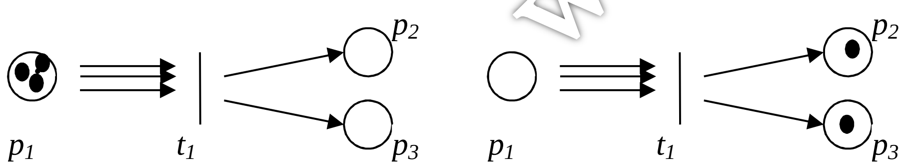
www.matematem.ru



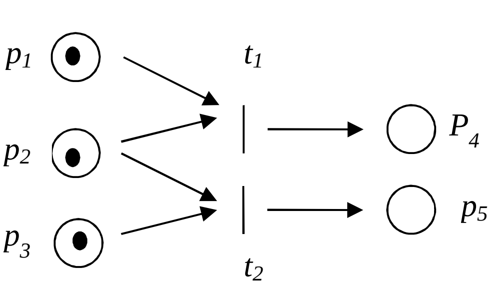
Переход разрешен только один раз.



Переход не разрешен.

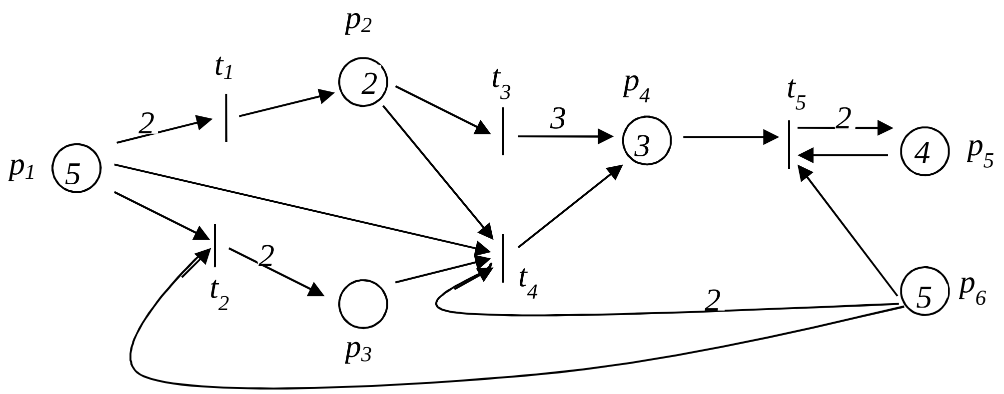


Переход разрешен. Начальная маркировка сети μ =(3;0;0) после срабатывания перехода изменится на μ' =(0;1;1).



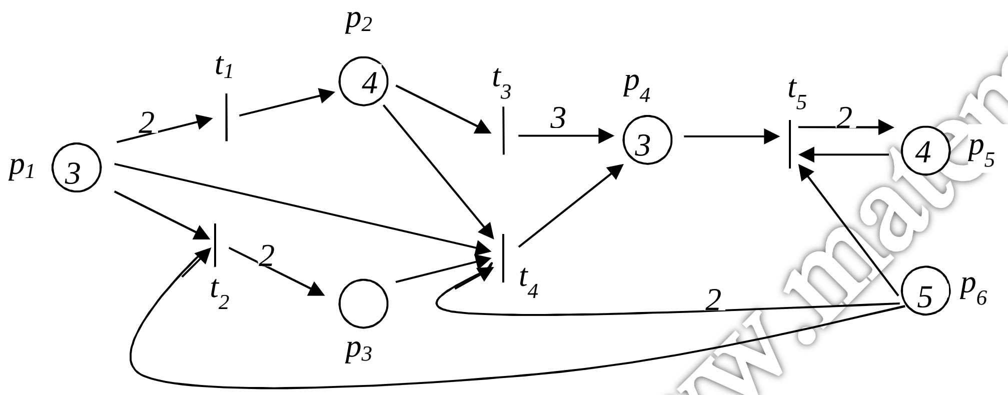
Разрешен либо переход t_1 , либо t_2 . Срабатывание каждого из них блокирует другой. Конфликтная ситуация.

Пример 1. Нарисовать граф сети Петри $C_\mu = \{P, T, I, O, \mu\}$, P={$p_1$; p_2 ; p_3 ; p_4; p_5 ; p_6};T={ t_1; t_2; t_3; t_4; t_5}; I(t_1)= { p_1 ; p_1 } ; O(t_1)= { p_2 }; I(t_2)= {p_1 ; p_6} ; O(t_2)= { p_3 ; p_3 }; I(t_3)= {p_2 } ; O(t_3)= { p_4 ; p_4 ; p_4 }; I(t_4)= {p_1 ; p_2 ; p_3 ; p_6; p_6} ; O(t_4)= { p_4 }; I(t_5)= {p_4 ; p_5; p_6} ; O(t_5)= { p_5 ; p_5 }; μ =(5;2;0;3;4;5). Определить, какие переходы разрешены в начальный момент времени. Указать маркировку после срабатывания переходов а) t_1; б) t_3; в) t_5; г) последовательности переходов t_2 , t_4

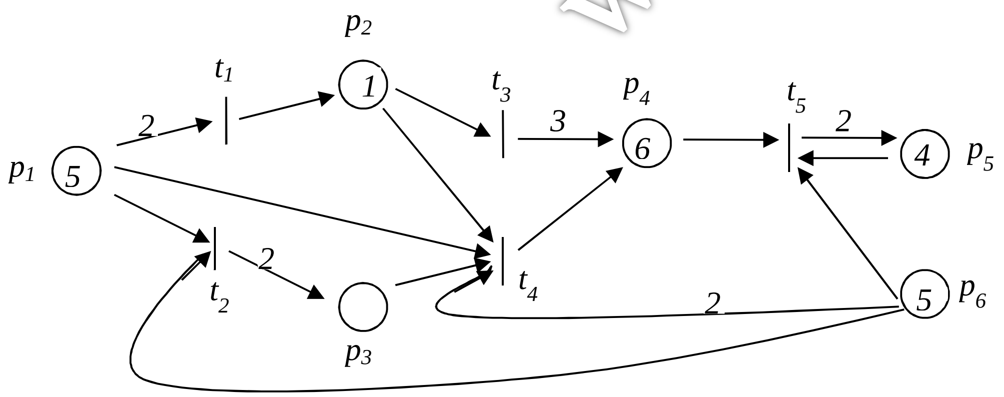


Разрешены переходы : t_1; t_2; t_3; t_5

а) срабатывание перехода t_1 : μ' =(3;4;0;3;4;5).

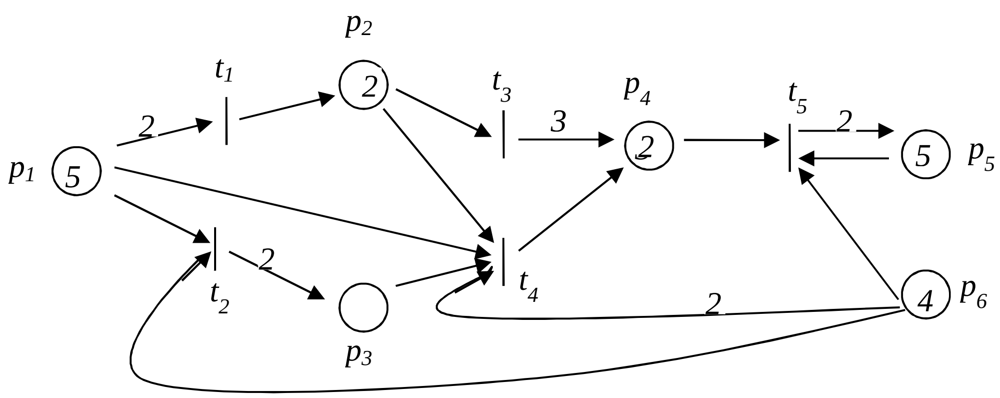


б) результат запуска перехода t_5 : μ'' =(5;1;0;6;4;5).

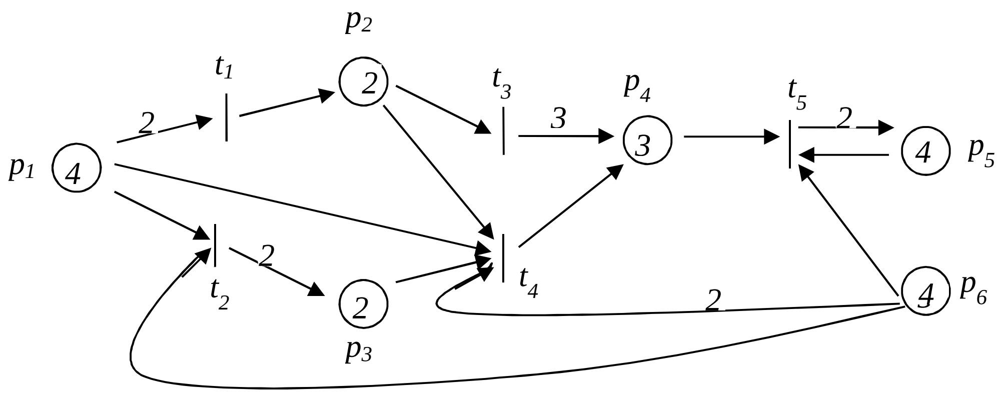


в) Маркировка, полученная в результате срабатывания перехода t_5 : μ''' =(5;2;0;2;5;4).

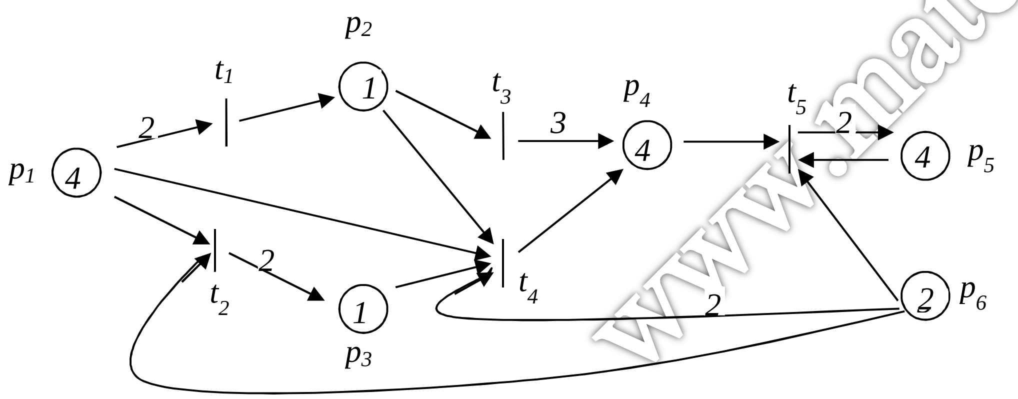
www.matematem.ru



в) запуск последовательности переходов t2 , t4:



Переход теперь разрешен μ' =(4;2;2;3;4;4); μ'' =(4;1;1;4;4;2).



www.matematem.ru

Очевидно, что еще одно срабатывание t_4 обнулит маркировку вершины p_6 . Теперь ни один из переходов t_3; t_4; t_5 не является разрешенным, и ни одно срабатывание оставшихся переходов не изменит данную ситуацию.

Определение 4. Маркировка μ'' называется ***достижимой*** из маркировки μ', если существует последовательность срабатывающих переходов, переводящая сеть из маркировки μ' в μ''.

Отношение «достижимости» является рефлексивным и транзитивным бинарным отношением на множестве маркировок.

Определение 5. Переход t_j называется ***достижимым*** из маркировки μ', если существует такая маркировка μ'',достижимая из μ', при которой происходит срабатывание перехода t_j.

Например, маркировка μ'' =(4;1;1;4;4;2) достижима из маркировок μ =(5;2;0;3;4;5) и μ' =(4;2;2;3;4;4). Переход t_j достижим из μ'' . Для доказательства недостижимости t_4 из маркировки μ, необходимо перебрать *<u>все</u>* последовательности переходов, срабатывание которых переводит сеть из μ в μ'' .

Определение 6. Сеть Петри называется ***живой***, если для любого текущего состояния существует такая последовательность переходов с началом в текущем состоянии, что любой заданный переход может сработать.

Доказав, что сеть является живой, можно гарантировать, что в соответствующей системе выполнимы все элементарные действия процессов при их развитии.

Примеры 2 а) , б) ,в), г)- примеры живой сети:

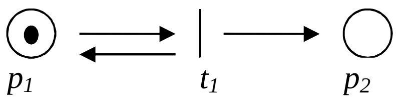


Рис.2а

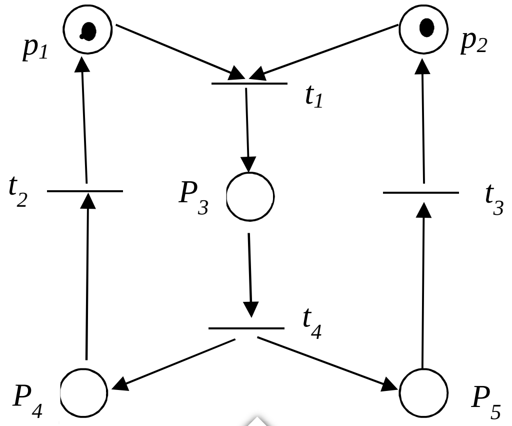


Рис.2в

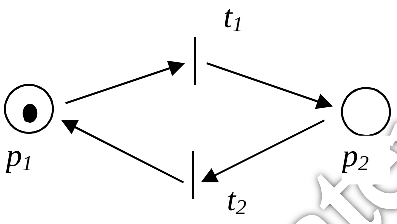


Рис. 2б

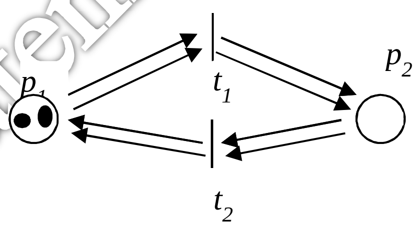


Рис. 2г

Определение 7. Сеть , не являющаяся живой, называется ***тупиковой***. ***Частичный тупик*** – такая маркировка, когда один или более переходов могут никогда не сработать. Сеть Петри ***находится в тупике***, если имеется маркировка, в котором ни один из переходов не может сработать.

Сеть из примера 1 – тупиковая. Маркировка μ'' =(4;1;1;4;4;2) - частичный тупик.

Определение 8. Сеть Петри называется ***безопасной***, если каждая позиция содержит не более одной метки.

В безопасной сети Петри в каждой позиции имеется либо одна метка, либо меток нет вообще. Наличие метки может означать протекание процесса, а ее отсутствие – сигнал о его остановке, поэтому для большинства систем контроля моделируют именно безопасную сеть Петри.

Все сети, рассмотренные в начале лекции, являются безопасными. Сети, изображенные на рисунках 2б) и 2в), безопасны. Сети 2а) и 2г) небезопасны.

Определение 9. Сеть Петри называется *k*-ограниченной, если количество меток в каждой позиции не превышает некоторое целое число *k*.

Ограниченная сеть Петри предоставляет возможность контроля проблемы переполнения. Очевидно, что безопасная цепь Петри – ограниченная, *k=1*. Сеть из примера 2а) ограниченной не является, все остальные сети из примеров – ограниченные.

Определение 10. Сеть Петри называется ***консервативной***, если сумма меток во всех позициях постоянна.

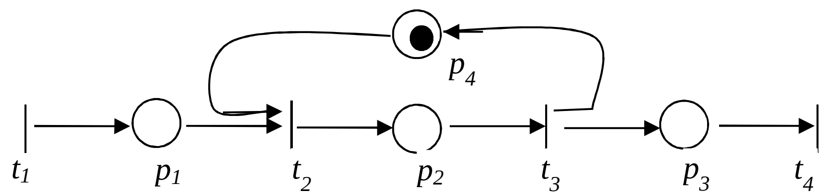
Консервативная сеть является ограниченной. У консервативной сети количество меток на входе каждого перехода равно количеству меток на выходе. Если метки описывают ресурсы, то консервативная сеть Петри гарантирует, что никакой ресурс не будет ни создан, ни утерян.

Сети, изображенные на рисунках 2б) и 2г), консервативны. Сети 2а) и 2в) неконсервативны.

Примеры построения сетей Петри

Пример 1

Построить сеть Петри, моделирующую работу рабочей станции, обслуживающей группу пользователей. Пользователь присылает заявку на обработку задания. Если станция свободна, она начинает обработку задания. После выполнения задания станция передает обслуженную заявку, освобождается и либо начинает обрабатывать новую заявку (если заявка поступила), либо ждет поступления новой заявки.



t_1- поступила заявка на обработку;

t_2- задание начинает обрабатываться ;

t_3- конец обработки задания ;

t_4- передача выполненной заявки ;

p_1- задание ждет освобождения станции;

p_2- задание обрабатывается ;

p_3- задание ожидает очереди на выход ;

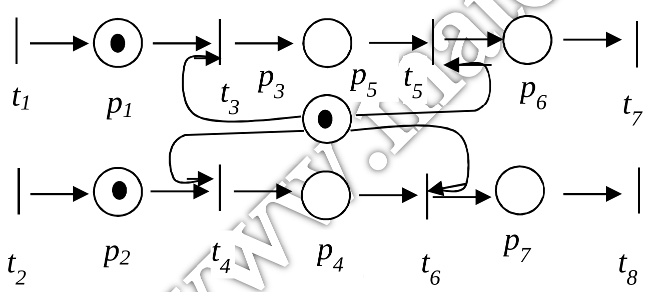
p_4- рабочая станция свободна ;

Позиция p_4 показывает, свободна ли рабочая станция. Наличие метки в позиции указывает на то, что станция свободна. Как только задание начинает обрабатываться, срабатывает переход t_2, и маркировка позиции обнуляется. После окончания обработки запускается переход t_3 и позиция p_4 вновь получает метку. Таким образом, пока не сработает переход t_3, новая заявка не может быть обработана.

Пример 2 (задача взаимного исключения)

Два пользователя имеют доступ к одним и тем же данным. Каждый пользователь может не только читать, но и изменять данные. Если оба пользователя одновременно изменят данные, то может привести к сбою в работе. Эта проблема решается путем взаимного исключения. Пока один пользователь работает с данными, для другого доступ закрыт.

Переходы t_3 и t_4 находятся в конфликте за метку в позиции p_5. При одновременном запросе на доступ к данным может сработать только из этих переходов. Одному из пользователей придется ожидать до тех пор, пока не сработает переход, указывающий, что второй пользователь освободил данные, и метка не будет перемещена.



Пример 3. Требуется описать с помощью сети Петри функционирование системы из предприятий А, В и С. Предприятия А и В поставляют узлы X1 и X2 соответственно, а на предприятии С происходит сборка, в каждый сборочный узел входит один узел X1 и два узла X2. На рис. 2.10 предприятиям А, В и С соответствуют переходы t1, t2 и t3.

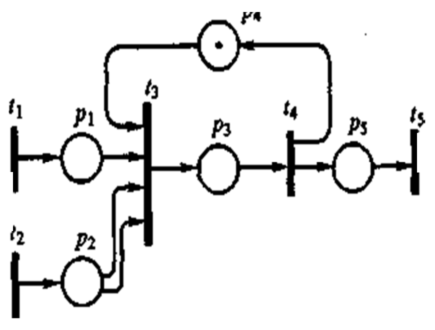


Рис. Сеть Петри для примера 3

www.matematem.ru

Срабатывание перехода t3 происходит только в том случае, если, во-первых, в позиции pl имеется метка, а в позиции р2 - не менее двух меток, что означает поступление от пред-приятии А и В соответствующих комплектующих, и, во-вторых, имеется метка в позиции р4, что означает, что предприятие С закончило сборку предыдущего изделия и готово приступить к сборке следующего. Пока очередное изделие не будет собрано, метки в р4 не будет, следовательно, запросы, пришедшие во входные позиции р1 и р2, вынуждены ожидать срабатывания перехода t4. Переходам t1, t2 и t3 поставлены в соответствие процедуры вычисления задержек срабатывания. Задержки в первых двух переходах равны интервалам времени между появлениями готовых узлов, задержка в t3 равна времени сборки изделия.

П р и м е р 4. Требуется описать с помощью сети Петри процессы возникновения и устранения неисправностей в некоторой технической системе, состоящей из М однотипных блоков; в запасе имеется один исправный блок; известны статистические данные об интенсивностях возникновения отказов и длительностях таких операций, как поиск неисправностей, замена и ремонт отказавшего блока. На рисунке представлена соответствующая сеть Петри. Отметим, что при числе меток в позиции, равном М, можно в ней не ставить М точек, а записать в позиции значение М.

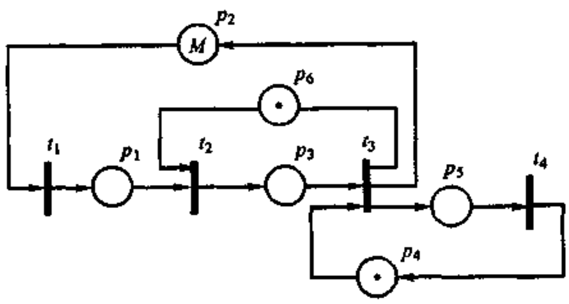


Рис. Сеть Петри для примера 4

В нашем примере значение М в позиции р2 соответствует числу имеющихся в системе блоков. Переходы отображают следующие события: t1 - отказ блока, t2- поиск неисправного блока, t3 - его замена, t4 - окончание ремонта.

Очевидно, что при непустой позиции р2 переход t1 срабатывает, но с задержкой, равной вычисленному случайному значению моделируемого отрезка времени между отказами. После выхода маркера из t1 он попадает через р1 в t2, если имеется метка в позиции р6, это означает, что обслуживающая систему бригада специалистов свободна и может приступить к поиску возникшей неисправности. В переходе t2 метка задерживается на время, равное случайному значению длительности поиска неисправности. Далее маркер оказывается в р3 и если имеется запасной блок (маркер в р4), то запускается переход t3, из которого маркеры выйдут в р2 , р5 и р6 через отрезок времени, требуемый для замены блока. После этого в t4 имитируется восстановление неисправного блока.

Рассматриваемая модель описывает функционирование системы в условиях, когда отказы могут возникать и в рабочем, и в неисправном состояниях системы. Поэтому не исключены ситуации, при которых более чем один маркер окажется в позиции p1.

www.matematem.ru