Занятие 6 ***Рациональные уравнения и неравенства***

1. Для каждого значения параметра решить

1) уравнение $\frac{(x-4)(x+a)}{x^2-(2a-2)x-2a+1}=0$
2) уравнение $\frac{x^2-ax-a-1}{(x-3)(x+2a)^2}=0$
3) неравенство $\frac{x-a}{2x+1}\geq 0$
4) неравенство $\frac{3-5x}{x-a}\geq 0$

2. При каких значениях параметра :

1) уравнение $x^2-5x+10=\frac{a+19}{x+2}$ имеет ровно 2 корня на отрезке [-1; 2.5] $\{\{-3\}\cup(-\frac{19}{8};1)\}$
2) уравнение $x-2=\frac{(a+1)(a-5)}{x+4}$ имеет ровно 1 корень на промежутке $(-\infty;0)$ $\{(-\infty;\ -1)\cup(-1;1]\cup\{2\}\cup[3;5)\cup(5;\ +\infty)\}$
3) уравнение $4\left(x-\sqrt{a\cdot 4^a}\right)x+4(4^a-1)+a=0$ имеет корни $\{\{0\}\cup[4;\ +\infty)\}$
4) уравнение $((a-2)x^2+6x)^2-4((a-2)x^2+6x)\ +4-a^2=0$ имеет ровно 2 решения $\{(-\infty;\ -1)\cup\{0;2\}\cup(5;\ +\infty)\}$
5) уравнение $ax-x^2-\frac{1}{x(a-x)}+2=0$ имеет ровно 2 решения на промежутке (-2;2]
6) уравнение $(x+\frac{1}{x-a})^2-(a+9)(x+\frac{1}{x-a})\ +2a(9-a)=0$ имеет ровно 4 решения $\{(-\infty;\ -2)\cup(2;3)\cup(3;\frac{7}{2})\cup(\frac{11}{2};\ +\infty)\}$
7) уравнение $(x^2-x+a^2+1)^2=4a^2(5x^2-x+1)$ имеет ровно 3 решения $\{\ \pm1,\pm\frac{2+\sqrt{19}}{10}\}$
8) уравнение $25\,x^5+25(a-1)x^3-4(a-7)x=0$ имеет ровно 5 решений, а сами решения, упорядоченные в порядке возрастания, образуют арифметическую прогрессию { -2 }
9) корни уравнения $x^4+(a-5)x^2+(a+2)^2=0$ являются последовательными членами арифметической прогрессии {-5 ; -5/13}
10) уравнение $x(x+1)(x+h)(x+1+h)=h^2$ имеет 4 действительных решения $\{(-\infty;\ -\sqrt{5}-2)\cup(-\sqrt{5}+2;0)\cup(0;\sqrt{5}-2)\cup(\sqrt{5}+2;\ +\infty)\}$
11) неравенство $\frac{x-2a-1}{x-a}<0$ выполняется для всех x, таких, что $1\leq x\leq 2$ $\{\ (1/2;1)\}$
12) множество решений неравенства $(p-x^2)(p+x-2)<0$ не содержит ни одного решения неравенства $x^2\leq 1$ $\{(-\infty;\ 0]\cup[3;\ +\infty)\}$
13) неравенство $\frac{a^2-4x-5}{x^2-4x-5}\geq 1$ имеет 4 целочисленных решения. Для каждого значения параметра укажите эти решения $\{a\epsilon(-6;\ 5]\cup\{\pm2,\pm3,\pm4\}\cup[-1;\ 0)\cup(0;\ 1]\cup[5;\ 6)\}$
14) неравенство $(x^2+y^2-3)(x^2+y^2-a)<0$ имеет ровно 4 целочисленных решения (x;y) $\{[1;2)\cup(4;5]\ \}$
15) неравенство $\left|\frac{x^2+ax+1}{x^2+x+1}\right|<3$ выполняется для всех x $\{(-1;5)\}$
16) сумма длин интервалов, составляющих решение неравенства $\frac{x^2+(2a^2+2)x-a^2+4a-6}{x^2+(a^2+5a-5)x-a^2+4a-6}<0$ не меньше 1 $\{(-\infty;\ 2]\cup[3;\ +\infty)\}$

3. Найдите все значения x, удовлетворяющие неравенству $(a+2)x^3-(1+2a)x^2-6a+(a^2+4a-5)>0$ хотя бы при одном значении a, принадлежащем отрезку [-2;1] $\{(-\infty;\ -1)\cup(-1;0)\cup(2;\ +\infty)\}$
4. Для каждого a определите значение наибольшее функции $f(x)=x^3-3ax^2$ на отрезке [-2; 2] { при a<2/3 8-12a , a>=2/3 0 }
5. Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x)=4x^2+4ax+a^2-2a+2$ на множестве $1\leq|x|\leq 3$ не меньше 3 $\{(-\infty;\ -2]\cup\{0\}\cup\ [7+\sqrt{17};\ +\infty)\}$

Занятие 7 Уравнения и неравенства с модулем

1. Для каждого значения параметра решить уравнение

1) $x|x-2|-a=0$
2) $|x^2-5x+4|+a=0$
3) $|2x-1|-|3+x|=a+x$
4) $|x-3|+|x|=ax+3$
5) $|x-4|=bx+2$

2. Сколько решений имеет уравнение $\left|x+\frac{1}{x}-3\right|=a-3$ в зависимости от параметра?

3. При каких значениях параметра :

1) уравнение $x^2-4|x|+2=p$ имеет ровно 3 решения
2) уравнение $|x^2-6x|=m$ имеет ровно 3 решения
3) уравнение $|x^2+2x+a|=2$ имеет 4 различных решения
4) уравнение $x^2-(3a-1)|x|+2a^2-a=0$ имеет 4 различных решения
5) уравнение $x+2=a|x-1|$ имеет единственное решение. Найти его.
6) уравнение $|1-ax|=1+(1-2a)x+ax^2$ имеет единственное решение {0;1}
7) уравнение $ax+\left|\frac{1}{x}+4\right|=2a$ имеет хотя бы один корень. Указать число корней для каждого значения параметра
8) уравнение $|x-2|+|x|-ax=2(a-1)$ имеет ровно один корень { $\{(-\infty;-2)\cup\{1\}\cup[2;+\infty)$ }
9) уравнение $|x+3|-a|x-1|=4$ имеет ровно 2 решения { $(-1;1)$ }
10) уравнение $|a^2+3-x|+|x-a-2|+|x-3a-1|=a^2-a+1$ имеет хотя бы один корень { $[\frac{1}{2};1]\cup[2;+\infty)$ }
11) уравнение $5|x-3a|+|x-a^2|+4x=a$ не имеет решений { $(-\infty;-8)\cup(0;+\infty)$ }
12) существует решение уравнения $|x|+|ax+2a-8|=4$ { $(-\infty;-4)\cup[\frac{4}{3};+\infty)$ }
13) уравнение $(|2x+1-a|+|2x+1+a|-2a)(|x^2-2x-a|+|x^2-2x+a|-2a)=0$ имеет ровно 4 целых решения { $[1;3)$ }
14) уравнение $(x^2-6|x|-a)^2+12(x^2-6|x|-a)+37=cos\frac{18\pi}{a}$ имеет ровно 2 корня {-3;9}
15) уравнение $x^{10}+(a-2|x|)^5+x^2-2|x|+a=0$ имеет более 3 решений { $(0;1)$ }
16) неравенство $|x+4a|<1-x^2$ имеет хотя бы 1 отрицательное решение
17) неравенство $\frac{1}{2}|a-2|\cdot|x-a+4|+\left(\frac{a^2-4a+3}{|a-2|}-|a-2|\right)\cdot|x-2|+\frac{1}{2}|a-2|\cdot|x-a|\le 1$ выполняется ровно для двух различных значений x { $2\pm\sqrt{2}$ }
18) неравенство $|x^2-8x+a+5|>10$ не имеет решений на отрезке [a-6;a] { $[\frac{19-\sqrt{45}}{2};\frac{7+\sqrt{69}}{2}]$ }
19) наибольшее значение функции $133ax-|x^2-10x+24|$ больше -2 { $\left(-\infty;-\frac{10+2\sqrt{22}}{133}\right)\cup(-\frac{1}{266};+\infty)$ }
20) число целочисленных решений неравенства $x^2+5(x+1)+3|x-a|+a\le 0$ максимально { $\{-5\}\cup[-3.5;3.5]$ }
21) система неравенств $\begin{cases}|x|+|a|<4\\x^2+16a\le 8x+48\end{cases}$ имеет хотя бы 1 решение на отрезке [0;1] { $(-4;8\sqrt{2}-8)$ }

Занятие 8 ***Иррациональные уравнения и неравенства***

1. Для каждого значения параметра решить

1) уравнение $\sqrt{x-a}=x-2$
2) уравнение $\sqrt{ax}=x+4$
3) уравнение $\sqrt{|x|+1}-\sqrt{|x|}=$ a
4) уравнение $x+\sqrt{a^2-x^2+2x-1}=2$
5) уравнение $x+\sqrt{a^2-x^2+4x-4}=3$
6) неравенство $\sqrt{x+1}\geq a$
7) неравенство $\sqrt{c^2-x^2}\geq 2-c$

2. Найти все значения параметра, при каждом из которых

1) уравнение $ax+\sqrt{3-2x-x^2}=4a+2$ имеет единственный корень
2) уравнение $\sqrt{a-(a+1)(2x+4)}=x+1$ имеет ровно 1 корень $\{(-\infty;-2)\cup\{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\}$ }
3) уравнение $a^2+8|x-5|+2\sqrt{x^2-10x+29}=2a+|x-2a-5|$ имеет хотя бы 1 корень {2}
4) уравнение $(4x-x^2)^2-32\sqrt{4x-x^2}=a^2-14a$ имеет хотя бы 1 корень $\{[0\,;6]\ \cup$ $[8\,;14]$ }
5) уравнение $2a^2-x^2-3a+8x=(3a-3)\sqrt{16-(x-4)^2}$ имеет 2 различных решения { $\left[0;\frac{3}{2}\right)\cup\{3\}\cup[\frac{7}{2};4)$ }
6) уравнение $\sqrt{x^4+(a-5)^4}=|x+a-5|+|x-a+5|$ имеет единственное решение { 3;7}
7) уравнение $x\sqrt{x-a}=\sqrt{6x^2-(6a+3)x+3a}$ имеет ровно 1 корень на отрезке [0;1] { $(-\infty;0)\cup[3-\sqrt{6};1]$ }
8) уравнение $\frac{(x-a-7)(x+a-2)}{\sqrt{10x-x^2-a^2}}=0$ имеет ровно 1 корень на отрезке [4;8] {$\left(-\frac{3+\sqrt{41}}{2};-3\right)\cup\{-\frac{5}{2}\}\cup(-2;1]$ }
9) уравнение $\sqrt{x^4-x^2+a^2}=x^2+x-a$ имеет 3 различных корня $\{(-\infty;\ -1)\cup(-1;0)$ }
10) уравнение $\sqrt{x}+\sqrt{2a-x}=a$ имеет 2 различных корня {[2;4)}
11) уравнение $\sqrt{1-2x}=a-7|x|$ имеет более двух различных корней $\{[\frac{7}{2};\frac{25}{7})$ }
12) все числа x из отрезка [1;5] удовлетворяют неравенству $3ax+2\sqrt{3x+1}-6x+a-5<0$ { $(-\infty;\frac{21}{16})$ }
13) неравенство $|x-a^2|-\sqrt{x-1/2}\geq 0$ выполняется при любом допустимом значении $\{[-1/2\,;1/2]$ }
14) система неравенств $\begin{cases} ax\geq 2\\ \sqrt{x-1}>a\\ 3x\leq 2a+11\end{cases}$ имеет хотя бы 1 решение на отрезке [3;4] { $[\frac{1}{2};\sqrt{3})$ }