

# План практических занятий по математическому анализу 1 семестр

## Занятие 1 . Вычисление пределов

1. Доказать, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{(-1)^n}{5^n}\right) = 2$

2. Вычислить предел последовательности:

а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+6}{3n-7}$  ; б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+3n+1}{4n^3+2n+2}$  ; в)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^4+2n^2-7}{2n^2-n+5}$  ; г)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n}\right)$  ;

д)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{n+1} - \frac{2n+1}{2}\right)$  ; е)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!-n!}$  ; ж)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)!+(n+3)!}{(n+1)!}$  ;

з)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n^2+3n+5}-5n+2\sqrt{n+1}}{7n+9\sqrt{n-3}+4}$  ; и)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2+3})$  ; к)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n+6^{n+1}}{4^{n+1}-6^n}$  .

3. Вычислить предел функции:

а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-5x+6}{x^2-2x}$  ; б)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-5x+6}{x^2-2x}$  в)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-2x}$  ; г)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}$  ;

д)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x+7x^2+9}{2^{x+1}-x^2+4x}$  ; е)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}$  ; ж)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$  ; з)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{(x+1)(x+2)} - x)$  ;

и)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x^2-2}$  ; к)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x \left(2 + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}\right) + 8 \cos x}$  ; л)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x + \sqrt[3]{1-x^3})$  .

Домашнее задание: №171-179, 181-214

## Занятие 2 . Замечательные пределы

1. Вычислить предел функции с помощью 1 замечательного предела:

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{3x}$  ; б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\sin 3x}$  ; в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x-2x}{\operatorname{tg} 5x}$  ; г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin \frac{1}{x}$  ;

д)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(3x-9)}{2x-6}$  ; е)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a}$  ; ж)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos 2x}{x^2}$  ; з)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin 5x}{x - \sin 7x}$  ;

и)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}}{x}$  , к)  $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$  .

2. Вычислить предел функции с помощью 2 замечательного предела:

а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x$  ; б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{7x^2}\right)^{2x}$  ; в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{3x}$  ; г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^{3x}$  ;

д)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^{3x}$  ; е)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x^2}\right)^{3x^3}$  ; ж)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 5x^2)^{\frac{2}{x^2}}$  ; з)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 5x^3)^{\frac{2}{x^2}}$  ;

и)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\operatorname{cosec} x}$  ; к)  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (1 - \cos x)^{\operatorname{tg} x}$  ; л)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3 \sin x + 1}{2x + 1}\right)^{3/x}$  .

Домашнее задание: №216-228, 230-239, 241-251

### Занятие 3 . Бесконечно малые величины

1. Доказать, что функции  $\frac{2x^2}{1+x}$  и  $x^2$  являются бесконечно малыми одного порядка при  $x \rightarrow 0$ .
2. Доказать, что порядок функции  $\frac{x^3}{3-x}$  выше, чем порядок функции  $x^2$  при  $x \rightarrow 0$ .
3. Доказать, что бесконечно малые при  $x \rightarrow 0$  функции  $\frac{x}{1-x}$  и  $\frac{x}{1+x^2}$  эквивалентны.
4. Определить порядок малости бесконечно малой при  $x \rightarrow 0$  функции  $\alpha(x) = 1 - \cos x$  относительно функции  $\beta(x) = x$ .
5. Вычислить предел функции, используя эквивалентность бесконечно малых величин:

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin x}{1 - \cos x}$  ; б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\ln(1-x)}$  ; в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\ln(e-2x)-1}$  ; г)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin 2x}$  ;

д)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+x}-3}{3 \operatorname{tg} 2x}$  ; е)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3}$  ; ж)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin^2 3x}{\cos 4x - \cos 3x}$  ; з)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{\ln x}$  ;

и)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x-3)}{x^2 - 4x + 3}$  , к)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos 3x - \cos x}{\operatorname{tg}^2 2x}$  ; л)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - x - 1} - 1}{\ln(x-1)}$  ; м)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\operatorname{In} \cos x}$ .

Домашнее задание: №289, 290, 293, 296-299.

### Занятие 4 . Непрерывность функций. Точки разрыва

1. Исследовать функции на непрерывность, найти точки разрыва; указать характер разрыва. В случае устранимого разрыва доопределить до непрерывной функции:

а)  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  ; б)  $f(x) = \begin{cases} \frac{|x+1|}{x+1} x - 1, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$  ; в)  $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x-4}$  ; г)  $y = e^{\frac{1}{x+1}}$  ;

д)  $f(x) = \frac{x^2 - 25}{x+5}$  ; е)  $f(x) = \frac{1}{2^{1-x} + 1}$  ; ж)  $y = \frac{\sqrt{x+15} - 3}{x^2 - 36}$  ; з)  $y = \begin{cases} \cos x, & -\frac{\pi}{2} \leq x < \pi/4 \\ 1, & x = \pi/4 \\ x^2 - \frac{\pi^2}{16}, & \frac{\pi}{4} \leq x < \pi \end{cases}$

Домашнее задание: №317-330.

### Занятие 5 . Вычисление производной функции

1. Вычислить производную функции  $y=f(x)$ :

а)  $y = \sqrt[3]{x^5} \cos x - \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^4}$  ; б)  $y = \frac{\operatorname{tg} x}{\arccos x} + \ln x \cdot 3^x - \operatorname{sh} x$  ; в)  $y = \cos^3 x$  ;

г)  $y = \cos x^3$  ; д)  $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3x + 1}}$  ; е)  $y = \ln(\operatorname{arctg} x)$ ; ж)  $y = \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}}$  ;

з)  $y = \sqrt{(1 + \arccos x)^3}$  ; и)  $y = 2 \ln(x^2 - 5x + 3) + \operatorname{th} 9\sqrt{x} - \cos 3$ .

Домашнее задание: №368-408, 412-454.

## Занятие 6 . Производная функции, ее физический и геометрический смысл.

1. Вычислить производную сложной функции  $y=f(x)$ :

а)  $y = \ln \operatorname{arctg} \sqrt{x}$  ; б)  $y = (\arcsin(2^x))^4$  ; в)  $y = \sin(3^{\sqrt{tgx}})$

2. Вычислить логарифмическую производную:

а)  $y = x^x$  ; б)  $y = (\operatorname{ctgx})^{x^3}$  ; в)  $y = y = x^{2^{\sqrt{x}}} + 2^{x^x}$

3. Найти уравнение касательной и нормали к кривой  $y=f(x)$  в указанной точке:

а)  $y = x^3 + 2x$  ,  $M(1,3)$  ; б)  $y = \frac{\ln x}{x}$  ,  $x_0 = 1$  ; в)  $y = \frac{3x-4}{2x-3}$  ,  $x_0 = 2$

4. Найти производную неявно заданной функции:

а)  $x^3y^2 + 5xy + 4x^4 - 3y^3 = 0$  б)  $x^2y^2 + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = 3$  в)  $x^y = y^x$

5. Найти производную параметрически заданной функции:

а)  $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}$  б)  $\begin{cases} x = \frac{3t}{1+t^3} \\ y = \frac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}$  в)  $\begin{cases} x = \ln^2 \sin t \\ y = 3\cos 4t - t \sin 2t \end{cases}$

Домашнее задание: №460-500, 518-540, 566-580, 582-594, 601-618, 631-639.

## Занятие 7 . Дифференциал функции. Производные высших порядков.

1. Вычислить дифференциал заданной функции :

а)  $y = (1 + tg 3x)^8$  ; б)  $y = \operatorname{arctg} \ln \sin 2^x$

2. Найти приближенное значение:

а)  $\sqrt{26,19}$  ; б)  $\sin 31^\circ$

3. Вычислить производную функции указанного порядка:

а)  $y = tg x$  ,  $y'' = ?$  ; б)  $y = (x + 1)^5$  ,  $y''' = ?$  ; в)  $y = x^3 e^x$  ,  $y^{IV} = ?$

4. Вычислить дифференциал третьего порядка функции  $y = \operatorname{arctg} x$

5. Найти производную второго порядка неявно заданной функции:

а)  $\operatorname{arctg} y - y + xy = 0$  б)  $e^{2xy^2} + 4xy^2 = e^2$

6. Найти производную третьего порядка параметрически заданной функции:

а)  $\begin{cases} x = \ln t \\ y = \sin 2t \end{cases}$  б)  $\begin{cases} x = \sin t - t \cos t \\ y = \cos t + t \sin t \end{cases}$

Домашнее задание: №722-730, 737-745, 667-674, 748-753, 692-696, 705-711 .

## Занятие 8 . Правило Лопиталя. Формула Тейлора.

1. Вычислить предел функции , используя правило Лопиталя:

а)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{\ln x}$  ; б)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin 5\pi x}{\sin 2\pi x}$  ; в)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} 2x}{\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}$  ; г)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{x^3 - 5x^2 + 7x - 3}$  ;  
д)  $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\operatorname{ctg} x - 1}{\sin 4x}$  ; е)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{\sin x - x^3}$  ; ж)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}$  ; з)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x}$  ;  
и)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 3x - 1}{x - \sin^2 5x}$  ; к)  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \operatorname{tg} x$  ; л)  $\lim_{x \rightarrow 0+} x^3 \ln x$  ; м)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right)$  ;  
н)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - \sqrt{x})$  ; о)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^2)$

2. Вычислить предел функции , используя формулу Тейлора:

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{1+x}{1-x} - 2 \sin x}{(1-x)^2 - 1 + \sin x}$  ; б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2 \cos 2x - \sin^2 2x}{x^4}$

3. Для функции  $y = \sin x$  оценить погрешность приближенной замены многочленом 3 степени на отрезке  $[0; 0,1]$  .

Домашнее задание: №776-797, 772 .

## Занятие 9 . Применение дифференциального исчисления к исследованию функций и построению графиков.

1. Определить экстремумы и интервалы монотонности функции:

а)  $f(x) = \frac{e^x}{x}$  ; б)  $f(x) = \frac{x^{2/3}}{x+2}$  ; в)  $f(x) = x^3 e^{-x}$ .

2. Определить наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке:

а)  $y = \frac{4-x^2}{4+x^2}$  ,  $x \in [-1; 3]$  ; б)  $y = x e^{-x^2/2}$  ,  $x \in [-2; 2]$

3. Определить точки перегиба и интервалы выпуклости функции  $f(x) = x^6 - 6x^5 + \frac{15}{2}x^4 + 3x$ .

4. Определить максимальную площадь равнобедренного треугольника, боковая сторона которого равна 10.

5. Найти асимптоты функции: а)  $y = \frac{4+x^3}{4-x^2}$  ; б)  $y = \frac{1}{(x-2)^2}$  .

Домашнее задание: № 811-854, 861-870, 891-900 , 903-913.

## Занятие 10 . Построение графика функции.

1. Построить график функции :

а)  $y = \frac{x^2 + 3x + 1}{x + 1}$  ; б)  $y = \sqrt[3]{x^2(x^3 - 1)}$  ; в)  $y = x^3 e^{-x}$  ; г)  $y = \frac{3 \ln x}{\sqrt{x}}$ .

Домашнее задание: № 916-971.

## Занятие 11 . Неопределенный интеграл

1. Вычислить неопределенный интеграл:

а)  $\int \left( x^5 - \frac{3}{x^4} + \sqrt[3]{x^2} + \frac{7}{x} - 4 \right) dx$     б)  $\int \left( e^x + x^e - 2 \sin 2x - \frac{3}{\cos^2 x/2} \right) dx$

в)  $\int \left( \frac{4}{\sqrt{4-x^2}} + \frac{4}{\sqrt{4+x^2}} \right) dx$     г)  $\int \left( \frac{1}{x^2+9} + \frac{1}{x^2-9} \right) dx$     д)  $\int \frac{dx}{\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}$     е)  $\int 2^{x+1} e^x dx$

ж)  $\int \frac{x \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x}{2^x} dx$     з)  $\int \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} dx$     и)  $\int tg^2 x dx$     к)  $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$     л)  $\int \frac{dx}{x^4+x^2}$

2. Вычислить неопределенный интеграл методом замены переменной:

а)  $\int \frac{dx}{2x-5}$     б)  $\int \sqrt[3]{(3x-7)^5} dx$     в)  $\int \frac{\ln^2 x dx}{x}$     г)  $\int \frac{dx}{x \ln x}$     д)  $\int \frac{\cos \ln 3x dx}{x}$     е)  $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{\sin^2 x + 3}}$

ж)  $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{\sin^2 x + 3}}$     з)  $\int \frac{e^{tg x} dx}{\cos^2 x}$     и)  $\int \frac{x dx}{x^2+1}$     к)  $\int \frac{3x^2 dx}{x^3+4}$     л)  $\int \frac{2x dx}{x^4+1}$     м)  $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2) \arcsin x}}$

н)  $\int \frac{\arctg^5 x dx}{x^2+1}$     о)  $\int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt{e^{2x}+1}}$     п)  $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$     р)  $\int \frac{2\sqrt{tg x} - 5 \sin x + 3x dx}{\cos^2 x}$

Домашнее задание: № 1031-1050, 1060-1130

## Занятие 12 . Метод интегрирования по частям

1. Вычислить неопределенный интеграл методом интегрирования по частям:

а)  $\int x e^x dx$     б)  $\int x \cos x dx$     в)  $\int (x^2 + x) \sin 2x dx$     г)  $\int \ln x dx$     д)  $\int \arctg x dx$   
е)  $\int x^2 \ln x dx$     ж)  $\int \cos x e^x dx$

2. Вычислить неопределенный интеграл от рациональной функции:

а)  $\int \frac{dx}{4-3x}$     б)  $\int \frac{dx}{(4-3x)^3}$     в)  $\int \frac{(3x-1) dx}{x^2-x+1}$     г)  $\int \frac{x dx}{x^2+6x+13}$     д)  $\int \frac{x+2}{(x^2+2x+5)^2} dx$

е)  $\int \frac{2dx}{(x-3)(x+2)}$     ж)  $\int \frac{2x+7}{x^2+x-2} dx$     з)  $\int \frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x} dx$     и)  $\int \frac{3x+2}{x(x+1)^3} dx$

к)  $\int \frac{x^3-2x+2}{(x^2+1)(x-1)^2} dx$     л)  $\int \frac{x^3+3}{(x+1)(x^2+1)^2} dx$

Домашнее задание: № 1213-1235, 1255-1261, 1280-1300

## Занятие 13 . Интегрирование тригонометрических функций.

1. Вычислить неопределенный интеграл :

а)  $\int \frac{dx}{\cos x}$     б)  $\int \frac{dx}{4 \sin x + 5}$     в)  $\int \frac{dx}{8-4 \sin x + 7 \cos x}$     г)  $\int \frac{dx}{\cos x}$     д)  $\int \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt{\cos x}}$     е)  $\int \frac{\cos^3 x + 3}{\sin^2 x} dx$

ж)  $\int \cos^2 x dx$     з)  $\int \sin^4 3x dx$     и)  $\int \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{\sin^2 x} dx$     к)  $\int \frac{dx}{\sqrt{\cos^7 x \sin x}}$     л)  $\int \operatorname{ctg}^4 x dx$

м)  $\int \sin 4x \sin 6x dx$     н)  $\int \cos 9x \sin 5x dx$     о)  $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x - 3} dx$     п)  $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$

Домашнее задание: № 1338-1370, 1373-1378

## Занятие 14 . Интегрирование иррациональных функций.

1. Вычислить неопределенный интеграл :

а)  $\int \frac{\sqrt{x} dx}{x - \sqrt[3]{x^2}}$     б)  $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-x+3}}$     в)  $\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x-3x^2}}$     г)  $\int \sqrt{9-x^2} dx$     д)  $\int \sqrt{1+x^2} dx$

е)  $\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x} dx$     ж)  $\int \frac{dx}{(x+1)^2 \sqrt{x^2+2x+2}}$     з) г)  $\int \sqrt{x+x^2} dx$

Домашнее задание: № 1403-1414