План практических занятий по линейной алгебре1 семестр

Занятие 1 . Алгебра матриц

1. (±) №2.76 $A=\begin{pmatrix}2&1&-1\\0&1&-4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2&1&0\\-3&2&2\end{pmatrix}$. Найти 3A+2B.
2. $A=\begin{pmatrix}1&2\\-3&-4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&-4\\5&-6\end{pmatrix}$. Найти $A+B+A^T+B^T$.
3. (±) $B=\begin{pmatrix}a&b&c\\c&b&a\\1&1&1\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}a&0&0\\b+c&b&0\\1+c&1+a&1\end{pmatrix}$. Доказать, что K=B-D кососимметрическая.
4. а) $(1\quad 2\quad 3)\cdot\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$=? б) (±) $(-2\quad 0\quad 1\quad 4)\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\-1\\5\end{pmatrix}$=?
5. №2.78 $A=\begin{pmatrix}3&-2\\5&-4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&4\\2&5\end{pmatrix}$. Найти AB и BA.
6. №2.84 $A=(4\quad 0\quad -2\quad 3\quad 1)$; $B=\begin{pmatrix}3\\1\\-1\\5\\2\end{pmatrix}$. Найти AB и BA.
7. (±) №2.103 $A=\begin{pmatrix}1&2&1&3\\4&-1&5&-1\end{pmatrix}$ Найти $A\cdot A^T$ и $A^T\cdot A$.
8. (∓) Показать, что для любой матрицы A $A\cdot A^T$ и $A^T\cdot A$ – симметрические матрицы.
9. (∓) №2.96 Найти все матрицы, перестановочные с матрицей $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$.
10. №2.90 Найти значение матричного многочлена f(A), если $f(x)=3x^2-4$, $A=\begin{pmatrix}2&1\\0&3\end{pmatrix}$

Занятие 2 . Определители

1. Вычислить определитель:

а) $\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix}\sin\alpha&-\cos\alpha\\\cos\alpha&\sin\alpha\end{vmatrix}$; в) (∓) №2.2 $\begin{vmatrix}a-b&a+b\\a+b&a-b\end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix}1&-2&0\\3&-5&2\\2&-3&6\end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix}8&7&2&10\\-8&2&7&10\\4&4&4&5\\0&4&-3&2\end{vmatrix}$; ж) (∓) №2.55 $\begin{vmatrix}2&-1&1&0\\0&1&2&-1\\3&-1&2&3\\3&1&6&1\end{vmatrix}$.

2. Решить уравнение : а) №2.8 $\begin{vmatrix}x&x+1\\-4&x+1\end{vmatrix}=0$; б) (∓) №2.19 $\begin{vmatrix}3&x&-x\\2&-1&3\\x+10&1&1\end{vmatrix}=0$
3. (∓) №2.21 Решить неравенство $\begin{vmatrix}3&-2&1\\1&x&-2\\-1&2&-1\end{vmatrix}<0$
4. (∓) Вычислить определитель Вандермонда $\begin{vmatrix}1&1&1\\x&y&z\\x^2&y^2&z^2\end{vmatrix}$. Выяснить, при каких x, y и z этот определитель равен нулю.
5. Решить СЛАУ по правилам Крамера:

а) $\begin{cases}3x+y=1\\x-2y=5\end{cases}$; б) $\begin{cases}x+y+z=-1\\2x-y-z=7\\x-2y+2z=-4\end{cases}$.

Занятие 3 . Обратная матрица

1. Найти матрицу, обратную данной:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; б) (±) $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Решить матричное уравнение: а) №2.121 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$;

б) $X\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}$; в) (∓) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 15 & 3 \\ -45 & 76 & 2 \end{pmatrix}$

3. Решить уравнения AX=B и YA=C-3Y, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 10 & 5 & 7 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ 7 & -13 \\ -9 & 1 \end{pmatrix}$

4. Решить СЛАУ с помощью обратной матрицы:

а) $\begin{cases} 3x + y = 1 \\ x - 2y = 5 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x + y + z = -1 \\ 2x - y - z = 7 \\ x - 2y + 2z = -4 \end{cases}$

5. №2.127 Вычислить значение функции $f(x) = 3x^2 - 3x + 2x^{-1} - x^{-2} + 2$ при $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Занятие 4 . Ранг матрицы

1. Найти ранг матрицы:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 7 & 8 & 18 \\ 3 & 7 & 17 \end{pmatrix}$; б) $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$; в) $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$;

г) №2.150 $D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$; д) (∓) $E = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Найти общее решение и ФСР однородной системы:

а) $\begin{cases} x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_5 = 0 \\ 2x_1 + 5x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 0 \end{cases}$, б) $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ 3x - 3y + 7z = 0 \\ 3x + 2z = 0 \end{cases}$

Занятие 5 .. Решение СЛАУ методом Гаусса

1. Найти общее решение неоднородной системы и ФСР однородной системы:

а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3 \end{cases}$, б) $\begin{cases} x - 2y - 3z = -3 \\ x + 3y - 5z = 0 \\ -x + 4y + z = 3 \\ 3x + y - 13z = -6 \end{cases}$; в) (∓) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + y - 3z = -1 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ x + 2y - 3z = 1 \end{cases}$

г) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 4 \\ 3x_1 + 8x_2 - 4x_4 = 14 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 5 \end{cases}$ д) $\begin{cases} x + y + z = -1 \\ 2x - y - z = 7 \\ x - 2y + 2z = -4 \end{cases}$

2. При каких значениях параметра λ система $\begin{cases} 2x + (\lambda + 2)y - z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \\ 5x - 3y + \lambda z = 0 \end{cases}$ имеет нетривиальное решение ? Найти его.

3. Найти решение СЛАУ в зависимости от λ. При каких значениях λ система допускает решение с помощью обратной матрицы? $\begin{cases} \lambda x + \lambda y + (\lambda + 1)z = \lambda \\ \lambda x + \lambda y + (\lambda - 1)z = \lambda \\ (\lambda + 1)x + \lambda y + (2\lambda + 3)z = 1 \end{cases}$

Занятие 6 . Собственные числа и собственные векторы матрицы

1. Найти собственные числа и собственные векторы матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 8 & 9 \\ -5 & -6 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 10 & -6 \\ 18 & -11 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

Занятие 7 . Приведение квадратичной формы к каноническому виду

1. Привести квадратичную форму к каноническому виду, указать преобразование координат:

а) $\varphi(x_1, x_2) = 9{x_1}^2 + 12x_1x_2 + 4{x_2}^2$; б) $\varphi(\vec{x}) = 3{x_1}^2 + 3{x_2}^2 + 9{x_3}^2 + 8x_2x_3$;

в) $\varphi(\vec{x}) = 11x^2 + 5y^2 + 2z^2 + 16xy + 4xz - 20yz$

Занятие 9 . Геометрические векторы

1. Даны точки А(1;2;3) и В(3;5;9). Найти координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, его длину и направляющие косинусы.
2. В параллелограмме OACB даны векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Найти векторы $\overrightarrow{MO}$, $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ и $\overrightarrow{MC}$, где М – точка пересечения диагоналей.
3. В тетраэдре OABC даны векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$. Выразить через них вектор $\overrightarrow{OF}$, где F– точка пересечения медиан основания АВС.
4. ($\mp$) Вне плоскости параллелограмма ABCD взята точка О. Выразить через $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ вектор $\overrightarrow{OK}$, где К - середина стороны АВ.
5. Определить, при каких значениях α и β векторы $\vec{a} = 2\vec{\imath} + \propto \vec{\jmath} + \vec{k}$ и $\vec{b} = 3\vec{\imath} - 6\vec{\jmath} + \beta\vec{k}$ коллинеарны?
6. Коллинеарны ли векторы $\vec{c} = 4\vec{a} - 2\vec{b}$ и $\vec{d} = \vec{b} - 2\vec{a}$, построенные на векторах $\vec{a}(1;\ -2:5)$ и $\vec{b}(3;-1;0)$?
7. Даны 3 последовательные вершины параллелограмма: A(1,1,4), B(2,3,-1) и C(-2,2,0). Найти координаты вершины D.
8. В треугольнике АВС с вершинами А(5;-1;4), В(3;-2;5) и С(5;2;3) найти:
   а) длину медианы АМ;
   б) координаты точки пересечения медиан
   в) основание биссектрисы BL.
9. Найти :
   а) координаты точки А, лежащей на оси OY и равноудаленной от точек В(1;-3;7) и С(5;7;-5);
   б) координаты середины отрезка ВС.
10. Разложить вектор $\vec{d} = (3;\ -1:2)$ по некомпланарным векторам $\vec{a} = (2;\ 0:1)$, $\vec{b} = (1;-1;1)$, $\vec{c} = (1;\ -1:2)$.

Занятие 10 . Скалярное и векторное произведения векторов

1. В треугольнике АВС с вершинами А(5;-1;4), В(3;-2;5) и С(5;2;3) найти угол В.
2. Найти острый угол между диагоналями параллелограмма , построенного на векторах $\vec{a}(2;\ 1:0)$ и $\vec{b}(0;-1;1)$.
3. (№ 1.70) Вычислить проекцию вектора $2\vec{a} - \vec{b}$ на вектор $\vec{a} + \vec{b}$, если $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $\widehat{\vec{a},\vec{b}} = 120^0$
4. Дано $\vec{a} \perp \vec{b}$, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 1$, $\widehat{\vec{a},\vec{c}} = \widehat{\vec{b},\vec{c}} = \pi/3$. Найти $(\vec{e},\vec{f})$, где $\vec{e} = 2\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{f} = \vec{c} - \vec{a}$.
5. Даны векторы $\vec{a} = (3;\ -2:6)$, $\vec{b} = (-2;1;0)$. Определить проекции векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на векторы $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $-\frac{1}{2}\vec{b}$.
6. Даны векторы $\vec{a} = 3\vec{\imath} - \vec{\jmath} - 2\vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k}$. Найти $[2\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} + 2\vec{b}]$.
7. Найти площадь треугольника и длину высоты BD из примера 1.
8. ($\mp$) Даны точки А(0;2;-1), В(1;-1;4) и С(α;-1;β). При каких α и β точка С лежит на прямой АС?
9. ($\mp$) (№ 1.117) Вычислить площадь параллелограмма , диагоналями которого служат векторы $2\vec{e} - \vec{f}$ и $4\vec{e} - 5\vec{f}$, где $\vec{e}$ и $\vec{f}$ – орты, $\widehat{\vec{e},\vec{f}} = \pi/4$.
10. Вычислить угол между векторами $\vec{a} = 2\vec{p} + 3\vec{q}$ и $\vec{b} = 4\vec{p} - \vec{q}$ и площадь параллелограмма , построенного на этих векторах, если $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 3$, $\widehat{\vec{p},\vec{q}} = 2\pi/3$.

Занятие 11 . Смешанное и двойное векторное произведения векторов

1. Компланарны ли векторы $\vec{a} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 2\vec{k}$. $\vec{b} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 3\vec{k}$ и $\vec{c} = 3\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} + \vec{k}$?
2. Найти объем тетраэдра с вершинами O(1;1;2), A(2;3;-1), B(2;-2;4) и C(-1;1;3) и высоту OD.
3. Лежат ли точки A(1;0;7), B(2;-2;4) и C(-1;1;3) на одной прямой?
4. При каких λ векторы $\vec{a} = (\lambda;\ 3:1)$, $\vec{b} = (5; -1; 2)$, $\vec{c} = (-1;\ 5:4)$ компланарны?
5. (∓) Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют левую тройку, $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 3$, $\widehat{\vec{a},\vec{b}} = \pi/3$, $\vec{a} \perp \vec{c}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$. Вычислить их смешанное произведение.
6. Даны векторы $\vec{a} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + \vec{k}$ и $\vec{c} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 3\vec{k}$. Найти их двойное векторное произведение.

Занятие 12 . Уравнение прямой на плоскости

1. а) Написать уравнение прямой, проходящей через точки A(-3;4) и B(2;3).
   б) Найти общее уравнение прямой.
   в) Найти угол наклона полученной прямой к положительному направлению оси OX.
   г) Составить уравнение прямой, проходящей через точку A перпендикулярно данной.

2. Даны вершины треугольника A(1;2); B(2;-2) и C(4;3). Найти:

   а) уравнение стороны AC;
   б) уравнение медианы AM;
   в) уравнение высоты BD;
   г) уравнение средней линии, параллельной AC.
3. Дана прямая L: $-2x + y - 1 = 0$ и точка A(-1;2).
   а) Вычислить расстояние от точки A до прямой L.
   б) Написать уравнение прямой, проходящей через точку A параллельно прямой L.
   в) Написать параметрическое уравнение прямой, проходящей через точку A перпендикулярно прямой L.
   г) Найти угол между прямой L и прямой $3x - 5y + 7 = 0$.
   д) Найти проекцию точки A на прямую L.
   е) Найти точку, симметричную точке A относительно прямой L.
   ж) Найти уравнение прямой, равноудаленной от точки A и прямой L.

Занятие 13 . Уравнение плоскости

1. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку A(2;5;-3) перпендикулярно BC, где B(7;8;-1), C(9;7;4).
2. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку A(1;0;-2) параллельно плоскости $2x - y + 5z - 4 = 0$.
3. (∓) Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M(2;-1;5) параллельно векторам $\vec{a} = (3;\ -1:1)$ и $\vec{b} = (2;1;-2)$.
4. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M(2;-1;3) перпендикулярно линии пересечения плоскостей $2x + y - 2z + 1 = 0$ и $x + y + z - 5 = 0$.
5. (∓) Написать уравнение плоскости, проходящей через точки A(2;3;-1) и B(1;5;3) параллельно вектору $\vec{a} = (3;\ -1:3)$.
6. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M(2;-1;5) параллельно векторам $\vec{a} = (3;\ -1:1)$ и $\vec{b} = (2;1;-2)$.
7. Найти расстояние от точки M(1;2;-3) до плоскости, проходящей через точки A(-3;4;-7), B(1;5;-4) и C(-5;-8;0).
8. Найти точку пересечения плоскостей $x - y - z - 10 = 0$, $4x + 11z + 43 = 0$ и $7x - 5y - 31 = 0$
9. Исследовать взаимное расположение плоскостей. Если плоскости параллельны, найти расстояние между плоскостями. Если пересекаются, то угол между плоскостями.
   а) $x + y - 1 = 0$ и $2x - y + 3z + 1 = 0$.
   б) $x + 2y - 2z + 2 = 0$ и $3x + 6y - 6z - 4 = 0$.

Занятие 14 . Уравнение прямой в пространстве

1. Написать канонические и параметрические уравнения медианы AP треугольника ABC: A(2;3;1), B(1;-2;0) и C(-3;2;2).
2. Написать уравнение прямой, проходящей через точку A(1;-2;0) перпендикулярно плоскости $3x - y + 2z - 1 = 0$.
3. Написать канонические уравнения прямой $\begin{cases} x + y - z + 2 = 0 \\ x - y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$
4. (∓) Написать канонические уравнения прямой, проходящей через точку A(2; -3; 4) параллельно прямой $\begin{cases} x + y - z + 2 = 0 \\ x - y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$.
5. Определить угол между прямыми $\begin{cases} 3x - 4y - 2z = 0 \\ 2x + y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} 4x + y - 6z - 2 = 0 \\ y - 3z + 2 = 0 \end{cases}$.
6. Доказать, что прямые $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{-2}$ и $\frac{x+1}{1} = \frac{y+11}{2} = \frac{z+6}{1}$ пересекаются. Найти точку пересечения прямых.
7. Найти угол между прямой, проходящей через точки A(-1;0;5) и B(1;2;0) и плоскостью $x - 3y + z = 0$.
8. Найти проекцию точки A(5;2;-1) на плоскость $2x - y + 3z + 23 = 0$.
9. Найти проекцию точки A(4;3;10) на прямую $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{5}$ и расстояние от A до прямой.
10. Провести плоскость через точку M(2;0;1) и прямую прямые $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+1}{-1}$.

Занятие 16 . Уравнения кривой на плоскости

Во всех заданиях сделать чертеж.

1. Найти полуоси, координаты фокусов и эксцентриситет эллипса $9x^2 + 4y^2 = 36$.
2. Составить каноническое уравнение эллипса, зная, что его большая полуось равна 12, эксцентриситет 0,5 .
3. ($\mp$) Составить уравнение эллипса с фокусами в точках $F_1(0;-1)$, $F_2(0;1)$ и малой полуосью, равной 2.
4. Определить фокусы, вершины и эксцентриситет гиперболы $9x^2 - 16y^2 + 144 = 0$.
5. Составить уравнение гиперболы с фокусами в точках $F_1(0;-3)$, $F_2(0;3)$ и мнимой полуосью, равной 2. Найти асимптоты.
6. Составить уравнение кривой, каждая точка которой равноудалена от прямой $y = -1$ и точки F(2;-5).
7. Привести к каноническому виду уравнение кривой $2x^2 + 2y^2 - 3x + 4y + 2 = 0.$
8. Привести к каноническому виду уравнение кривой $3x^2 - 18x + 4y + 35 = 0.$
9. Привести к каноническому виду уравнение кривой $x^2 - y^2 - 4x + 2y + 7 = 0.$
10. Привести к каноническому виду уравнение кривой $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 36 = 0.$

Занятие 17 . Уравнения поверхности в пространстве

Во всех заданиях установить тип поверхности, сделать чертеж.

1. Исследовать поверхность $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$ координатными плоскостями. Найти точки пересечения с прямой $\frac{x-\sqrt{11}}{0} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+11}{1}$.
2. $4 - z = x^2 + y^2$.
3. $x^2 - y^2 + z^2 + 4 = 0$.
4. $2x^2 - y^2 + 2z^2 + 4x + 2y + 8z + 1 = 0$.