

Тема 3. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

3.1 Линейное однородное уравнение

Дифференциальное уравнение вида

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0, \quad (3.1)$$

где $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ — действительные числа, называется **линейным однородным дифференциальным уравнением n -го порядка с постоянными коэффициентами**.

Для того, чтобы найти общее решение уравнения (3.1), нужно составить **характеристическое уравнение**:

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0, \quad (3.2)$$

которое получается из уравнения (3.1) заменой в нем производных искомой функции $y^{(k)}(x)$ соответствующими степенями λ^k , $1 \leq k \leq n$, причем сама функция $y(x)$ заменяется на 1.

Уравнение (3.2) является алгебраическим уравнением n -ой степени и, согласно основной теореме алгебры многочленов, имеет ровно n корней (с учетом кратностей).

Напомним понятие кратности корня. Рассмотрим сначала квадратное уравнение с действительными

$$at^2 + bt + c = 0.$$

Для того, чтобы найти его корни, сначала вычислим дискриминант:

$$D = b^2 - 4ac.$$

Дальнейшее зависит от знака дискриминанта:

1) $D > 0$. Тогда уравнение имеет два различных действительных корня, которые вычисляются по формуле

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Далее, легко проверить, что в этом случае

$$at^2 + bt + c = a(t - t_1)(t - t_2).$$

Так как в разложении на множители каждая из скобок $(t - t_1)$, $(t - t_2)$ имеет первую степень, то говорят, что $t = t_{1,2}$ — корни кратности 1.

2) $D = 0$. Тогда уравнение имеет один действительный корень, который вычисляется по формуле:

$$t_0 = \frac{-b}{2a}.$$

Также легко проверить, что в этом случае

$$at^2 + bt + c = a(t - t_0)^2.$$

Так как в разложении на множители скобка $(t - t_0)$ имеет вторую степень, то говорят, что $t = t_0$ — корень кратности 2.

3) $D < 0$. Тогда уравнение имеет два комплексно-сопряженных корня, которые вычисляются по формуле

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b \pm i\sqrt{|D|}}{2a}.$$

Легко проверить, что в этом случае разложение на множители выйдет так же, как в случае 1):

$$at^2 + bt + c = a(t - t_1)(t - t_2),$$

и, значит, $t = t_{1,2}$ — корни кратности 1.

В общем случае найдя корни уравнения

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0,$$

разложим характеристический многочлен на линейные множители:

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = (\lambda - \lambda_1)^{k_1}(\lambda - \lambda_2)^{k_2} \dots (\lambda - \lambda_m)^{k_m},$$

$$k_1 + k_2 + \dots + k_m = n.$$

Тогда корень $\lambda = \lambda_1$ имеет кратность k_1 , корень $\lambda = \lambda_2$ — кратность k_2 , ..., корень $\lambda = \lambda_m$ — кратность k_m .

Каждому корню характеристического уравнения (3.2) соответствует определенное частное решение (или набор частных решений) уравнения (3.1). Частные решения уравнения, соответствующие различным корням характеристического уравнения, приведены в таблице:

№	Корень характеристического уравнения	Частное решение
1.	$\lambda = \lambda_1$ — действительный корень кратности 1	$e^{\lambda_1 x}$
2.	$\lambda = \lambda_1$ — действительный корень кратности 2	$e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}$
3.	$\lambda = \lambda_1$ — действительный корень кратности k	$e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, \dots, x^{k-1}e^{\lambda_1 x}$
4.	$\lambda = \pm i\beta$ — мнимые корни кратности 1	$\cos \beta x, \sin \beta x$

5.	$\lambda = \pm i\beta$ — мнимые корни кратности 2	$\cos \beta x, \sin \beta x,$ $x \cos \beta x, x \sin \beta x$
6.	$\lambda = \pm i\beta$ — мнимые корни кратности k	$\cos \beta x, \sin \beta x,$ $x \cos \beta x, x \sin \beta x, \dots,$ $x^{k-1} \cos \beta x, x^{k-1} \sin \beta x$
7.	$\lambda = \alpha \pm i\beta$ — комплексные корни кратности 1	$e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x$
8.	$\lambda = \alpha \pm i\beta$ — комплексные корни кратности 2	$e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x,$ $xe^{\alpha x} \cos \beta x, xe^{\alpha x} \sin \beta x$
9.	$\lambda = \alpha \pm i\beta$ — комплексные корни кратности k	$e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x,$ $xe^{\alpha x} \cos \beta x, xe^{\alpha x} \sin \beta x, \dots,$ $x^{k-1} e^{\alpha x} \cos \beta x, x^{k-1} e^{\alpha x} \sin \beta x$

Таким образом, найдя корни характеристического уравнения, мы получим из таблицы ровно n ненулевых частных решений уравнения (3.1). Найденные частные решения являются **линейно независимыми**, а именно:

Определение 3.1. *Функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ называются линейно независимыми на интервале (a, b) , если*

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x) \equiv 0, \quad x \in (a, b)$$

тогда и только тогда, когда $C_1 = C_2 = \dots = C_n = 0$.

Если найдется набор коэффициентов $C_1, C_2, \dots, C_n$, не равных нулю одновременно, таких, что

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x) \equiv 0, \quad x \in (a, b),$$

то функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ называются линейно зависимыми на интервале (a, b) .

Определение 3.2. *Всякая система из n линейно независимых частных решений $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ уравнения (3.1) называется **фундаментальной системой решений (ФСР)** данного уравнения.*

Если известна фундаментальная система решений уравнения (3.1), то его общее решение записывается в соответствии со следующей теоремой:

Теорема 3.1 (о структуре общего решения линейного однородного уравнения). *Если известна какая-нибудь фундаментальная система решений уравнения (3.1), то его общее решение записывается в виде*

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x), \quad (3.3)$$

где $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ — функции фундаментальной системы, а $C_1, C_2, \dots, C_n$ — произвольные постоянные.

Пример 3.1. Решить уравнение

$$2y'' + 5y' + 2y = 0. \quad (3.4)$$

Решение:

1) Характеристическое уравнение:

$$2\lambda^2 + 5\lambda + 2 = 0$$

$$D = 25 - 16 = 9 > 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{-5 + 3}{4} = -\frac{1}{2} \\ \lambda_2 = \frac{-5 - 3}{4} = -2 \end{cases}$$

— действительные корни кратности 1.

2) ФСР:

$$y_1 = e^{-x/2}, \quad y_2 = e^{-2x}.$$

3) Общее решение уравнения (3.4):

$$y = C_1 e^{-x/2} + C_2 e^{-2x},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Ответ: $y = C_1 e^{-x/2} + C_2 e^{-2x}$.

Пример 3.2. Решить уравнение

$$y'' + 6y' + 13y = 0. \quad (3.5)$$

Решение:

1) Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 6\lambda + 13 = 0$$

$$D = 36 - 52 = -16 < 0, \quad \sqrt{D} = \pm 4i \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{-6 + 4i}{2} = -3 + 2i \\ \lambda_2 = \frac{-6 - 4i}{2} = -3 - 2i \end{cases}$$

— комплексно-сопряженные корни кратности 1.

2) ФСР:

$$y_1 = e^{-3x} \cos 2x, \quad y_2 = e^{-3x} \sin 2x.$$

3) Общее решение уравнения (3.5):

$$y = C_1 e^{-3x} \cos 2x + C_2 e^{-3x} \sin 2x,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Ответ: $y = C_1 e^{-3x} \cos 2x + C_2 e^{-3x} \sin 2x$.

Пример 3.3. Решить задачу Коши:

$$y'' + 2y' + 2y = 0, \quad y(0) = y'(0) = 1. \quad (3.6)$$

Решение:

1) Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$

$$D = 4 - 8 = -4 < 0, \quad \sqrt{D} = \pm 2i \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{-2 + 2i}{2} = -1 + i \\ \lambda_2 = \frac{-2 - 2i}{2} = -1 - i \end{cases}$$

— комплексно-сопряженные корни кратности 1.

2) ФСР:

$$y_1 = e^{-x} \cos x, \quad y_2 = e^{-x} \sin x.$$

3) Общее решение уравнения (3.6):

$$y = C_1 e^{-x} \cos x + C_2 e^{-x} \sin x, \quad (3.7)$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

4) Найдём значения констант C_1 и C_2 :

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{-x} \cos x + C_2 e^{-x} \sin x \Rightarrow \\ y' &= C_1 (e^{-x} \cos x)' + C_2 (e^{-x} \sin x)', \\ y' &= -C_1 e^{-x} (\cos x + \sin x) + C_2 e^{-x} (-\sin x + \cos x). \end{aligned}$$

Подставим в полученные соотношения начальные условия $x = 0, y = 1, y' = 1$:

$$\begin{cases} 1 = C_1 e^0 \cos 0 + C_2 e^0 \sin 0 \\ 1 = -C_1 e^0 (\cos 0 + \sin 0) + C_2 e^0 (-\sin 0 + \cos 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = C_1 \\ 1 = -C_1 + C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 2. \end{cases}$$

Подставив найденные значения C_1 и C_2 в общее решение (3.7), находим

$$y = e^{-x} \cos x + 2e^{-x} \sin x$$

— решение задачи Коши (3.6).

Ответ: $y = e^{-x} \cos x + 2e^{-x} \sin x$.

Пример 3.4. Решить задачу Коши

$$y'' - 2y' + y = 0, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 2. \quad (3.8)$$

Решение:

1) Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

$$D = 4 - 4 = 0 \Rightarrow \lambda_0 = \frac{2}{2} = 1$$

— корень кратности 2.

2) ФСР:

$$y_1 = e^x, \quad y_2 = xe^x.$$

3) Общее решение уравнения (3.8):

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x, \quad (3.9)$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

4) Найдём значения констант C_1 и C_2 :

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^x + C_2 x e^x \Rightarrow \\ y' &= C_1 (e^x)' + C_2 (x e^x)' \\ y' &= C_1 e^x + C_2 (e^x + x e^x) = C_1 e^x + C_2 e^x (1 + x). \end{aligned}$$

Подставим в полученные соотношения начальные условия $x = 0, y = 4, y' = 2$:

$$\begin{cases} 4 = C_1 e^0 + C_2 \cdot 0 \cdot e^0 \\ 2 = C_1 e^0 + C_2 e^0 (1 + 0) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 4 = C_1 \\ 2 = C_1 + C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 4 \\ C_2 = -2. \end{cases}$$

Подставив найденные значения C_1 и C_2 в общее решение (3.9), находим

$$y = 4e^x - 2xe^x$$

— решение задачи Коши (3.8).

Ответ: $y = 4e^x - 2xe^x$.

Пример 3.5. Решить уравнение

$$y''' + 3y'' + 2y' = 0. \quad (3.10)$$

Решение:

1) Характеристическое уравнение:

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda^2 + 3\lambda + 2) = 0.$$

а) $\lambda_1 = 0$ — действительный корень кратности 1;

б) $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -2$ — действительные корни кратности 1.

2) ФСР:

$$y_1 = e^{0 \cdot x} = 1, \quad y_2 = e^{-x}, \quad y_3 = e^{-2x}.$$

3) Общее решение уравнения (3.10):

$$y = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{-2x},$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

Ответ: $y = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{-2x}$.

Пример 3.6. Решить уравнение

$$y''' - 8y = 0. \quad (3.11)$$

Решение:

1) Характеристическое уравнение:

$$\lambda^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda^2 + 2\lambda + 4) = 0.$$

а) $\lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2$ — действительный корень кратности 1;

б) $\lambda^2 + 2\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{2,3} = -1 \pm i\sqrt{3}$ — комплексно-сопряженные корни кратности 1.

2) ФСР:

$$y_1 = e^{2x}, \quad y_2 = e^{-x} \cos \sqrt{3}x, \quad y_3 = e^{-x} \sin \sqrt{3}x.$$

3) Общее решение уравнения (3.11):

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} \cos \sqrt{3}x + C_3 e^{-x} \sin \sqrt{3}x,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

Ответ: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} \cos \sqrt{3}x + C_3 e^{-x} \sin \sqrt{3}x$.

Пример 3.7. Решить уравнение

$$y''' + 25y' = 0. \quad (3.12)$$

Решение:

1) Характеристическое уравнение:

$$\lambda^3 + 25\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda^2 + 25) = 0.$$

а) $\lambda_1 = 0$ — действительный корень кратности 1;

б) $\lambda^2 + 25 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = -25 \Rightarrow \lambda_{2,3} = \pm 5i$ — мнимые корни кратности 1.

2) ФСР:

$$y_1 = e^{0 \cdot x} = 1, \quad y_2 = \cos 5x, \quad y_3 = \sin 5x.$$

Общее решение уравнения (3.12):

$$y = C_1 + C_2 \cos 5x + C_3 \sin 5x,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

Ответ: $y = C_1 + C_2 \cos 5x + C_3 \sin 5x$.

Пример 3.8. Решить уравнение

$$y^{IV} + 2y''' + y'' = 0. \quad (3.13)$$

Решение:

1) Характеристическое уравнение:

$$\lambda^4 + 2\lambda^3 + \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2(\lambda^2 + 2\lambda + 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2(\lambda + 1)^2 = 0.$$

а) $\lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$ — действительный корень кратности 2;

б) $(\lambda + 1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = -1$ — действительный корень кратности 2.

2) ФСР:

$$y_1 = e^{0 \cdot x} = 1, \quad y_2 = xe^{0 \cdot x} = x, \quad y_3 = e^{-x}, \quad y_4 = xe^{-x}.$$

3) Общее решение уравнения (3.13):

$$y = C_1 + C_2x + C_3e^{-x} + C_4xe^{-x},$$

где $C_i, 1 \leq i \leq 4$ — произвольные постоянные.

Ответ: $y = C_1 + C_2x + C_3e^{-x} + C_4xe^{-x}$.

Пример 3.9. Решить уравнение

$$y^V + 9y''' = 0. \quad (3.14)$$

Решение:

1) Характеристическое уравнение:

$$\lambda^5 + 9\lambda^3 = 0 \Leftrightarrow \lambda^3(\lambda^2 + 9) = 0.$$

а) $\lambda^3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$ — действительный корень кратности 3;

б) $\lambda^2 + 9 = 0 \Rightarrow \lambda_{2,3} = \pm 3i$ — мнимые корни кратности 1.

2) ФСР:

$$y_1 = e^{0 \cdot x} = 1, \quad y_2 = xe^{0 \cdot x} = x, \quad y_3 = x^2e^{0 \cdot x} = x^2, \\ y_4 = \cos 3x, \quad y_5 = \sin 3x.$$

3) Общее решение уравнения (3.13):

$$y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4 \cos 3x + C_5 \sin 3x,$$

где $C_i, 1 \leq i \leq 5$ — произвольные постоянные.

Ответ: $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4 \cos 3x + C_5 \sin 3x$.

Задачи для самостоятельного решения

3.1.1. $y'' + 5y' + 6y = 0$

$$3.1.2. \quad y'' - 6y' + 34y = 0$$

$$3.1.3. \quad y'' + 25y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

$$3.1.4. \quad y'' - 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -1$$

$$3.1.5. \quad y'' + 4y' + 29y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 15$$

$$3.1.6. \quad y'' - 4y' + 3y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1$$

$$3.1.7. \quad y'' + 5y' = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 10$$

$$3.1.8. \quad y''' - 4y' = 0$$

$$3.1.9. \quad y''' + 9y' = 0$$

$$3.1.10. \quad y''' + 2y'' + 10y' = 0$$

$$3.1.11. \quad y''' - 4y'' + 4y' = 0$$

$$3.1.12. \quad y^{IV} + 10y'' + 9y = 0$$

$$3.1.13. \quad y^{IV} + 18y'' + 81y = 0$$

$$3.1.14. \quad y^V - 3y^{IV} + 2y''' = 0$$

$$3.1.15. \quad y^V - 2y^{IV} + y''' = 0$$

$$3.1.16. \quad y^V - y' = 0$$

Ответы к задачам для самостоятельного решения

$$3.1.1. \quad y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}$$

$$3.1.2. \quad y = C_1 e^{3x} \cos 5x + C_2 e^{3x} \sin 5x$$

$$3.1.3. \quad y = \cos 5x$$

$$3.1.4. \quad y = 3e^{2x} - 7xe^{2x}$$

$$3.1.5. \quad y = 3e^{-2x} \sin 5x$$

$$3.1.6. \quad y = -1/2 e^{3x} + 5/2 e^x$$

$$3.1.7. \quad y = 2 - 2e^{-5x}$$

$$3.1.8. \quad y = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-2x}$$

$$3.1.9. \quad y = C_1 + C_2 \cos 3x + C_3 \sin 3x$$

$$3.1.10. \quad y = C_1 + C_2 e^{-x} \cos 3x + C_3 e^{-x} \sin 3x$$

$$3.1.11. \quad y = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 x e^{2x}$$

$$3.1.12. \quad y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 \cos 3x + C_4 \sin 3x$$

$$3.1.13. \quad y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + C_3 x \cos 3x + C_4 x \sin 3x$$

$$3.1.14. \quad y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^x + C_5 e^{2x}$$

$$3.1.15. \quad y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^x + C_5 x e^x$$

$$3.1.16. \quad y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x} + C_4 \cos x + C_5 \sin x$$

3.2 Линейное неоднородное уравнение

Дифференциальное уравнение вида

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f(x), \quad (3.15)$$

где $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ — действительные числа, а $f(x) \not\equiv 0$ — некоторая непрерывная функция, называется **линейным неоднородным дифференциальным уравнением n -го порядка**.

3.2.1 Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа) для уравнения 2-го порядка

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$y'' + a_1y' + a_0 = f(x). \quad (3.16)$$

Алгоритм решения:

1) Сначала решим линейное однородное уравнение

$$y'' + a_1y' + a_0 = 0. \quad (3.17)$$

Пусть

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$$

— общее решение уравнения (3.17).

2) Аналогично методу вариации произвольной постоянной для линейного уравнения первого порядка (см. часть 1), будем искать общее решение уравнения (3.16) в виде

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x), \quad (3.18)$$

где $C_1(x), C_2(x)$ — неизвестные функции, а $y_1(x), y_2(x)$ — функции ФСР линейного однородного уравнения (3.17).

Искомые функции $C_1(x), C_2(x)$ должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0 \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x). \end{cases} \quad (3.19)$$

Относительно производных $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ данная система линейна и может быть решена методом исключения или методом Крамера. Приведем алгоритм метода Крамера:

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}.$$

Заметим, что $\Delta(x) \neq 0$ для любого допустимого значения x , это значит, что метод Крамера применим для решения системы (3.19). Далее,

$$\begin{aligned}\Delta_1(x) &= \begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ f(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \Rightarrow C_1'(x) = \frac{\Delta_1(x)}{\Delta(x)}, \\ \Delta_2(x) &= \begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & f(x) \end{vmatrix} \Rightarrow C_2'(x) = \frac{\Delta_2(x)}{\Delta(x)}.\end{aligned}$$

Интегрируя полученные соотношения, имеем,

$$\begin{aligned}C_1(x) &= \int \frac{\Delta_1(x)}{\Delta(x)} dx + D_1, \\ C_2(x) &= \int \frac{\Delta_2(x)}{\Delta(x)} dx + D_2,\end{aligned}$$

где D_1, D_2 — произвольные постоянные.

3) Подставляя найденные функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в соотношение (3.18), получим общее решение линейного неоднородного уравнения (3.16).

Пример 3.10. Решить уравнение

$$y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}. \quad (3.20)$$

Решение:

1) Сначала найдем решение линейного однородного уравнения

$$\begin{aligned}y'' + 4y &= 0, \\ \lambda^2 + 4 &= 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 2i \text{ — мнимые корни кратности } 1 \Rightarrow \\ y &= C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.\end{aligned}$$

2) Решение уравнения (3.20) будем искать в виде

$$y = C_1(x) \cos 2x + C_2(x) \sin 2x, \quad (3.21)$$

где $C_1(x), C_2(x)$ — некоторые неизвестные функции. Искомые функции $C_1(x), C_2(x)$ должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{aligned}\begin{cases} C_1'(x) \cos 2x + C_2'(x) \sin 2x = 0 \\ C_1'(x)(\cos 2x)' + C_2'(x)(\sin 2x)' = \frac{1}{\cos 2x} \end{cases} &\Leftrightarrow \\ \begin{cases} C_1'(x) \cos 2x + C_2'(x) \sin 2x = 0 \\ -2C_1'(x) \sin 2x + 2C_2'(x) \cos 2x = \frac{1}{\cos 2x} \end{cases}.\end{aligned}$$

Решим полученную систему методом Крамера:

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2 \sin 2x & 2 \cos 2x \end{vmatrix} = 2 \cos^2 2x + 2 \sin^2 2x = 2,$$

$$\Delta_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & \sin 2x \\ \frac{1}{\cos 2x} & 2 \cos 2x \end{vmatrix} = -\frac{\sin 2x}{\cos 2x} \Rightarrow$$

$$C_1'(x) = \frac{\Delta_1(x)}{\Delta(x)} = -\frac{\sin 2x}{2 \cos 2x},$$

$$\Delta_2(x) = \begin{vmatrix} \cos 2x & 0 \\ -2 \sin 2x & \frac{1}{\cos 2x} \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow$$

$$C_2'(x) = \frac{\Delta_2(x)}{\Delta(x)} = \frac{1}{2}.$$

Проинтегрировав полученные соотношения, найдем $C_1(x)$ и $C_2(x)$:

$$C_1(x) = -\frac{1}{2} \int \frac{\sin 2x}{\cos 2x} dx = \begin{vmatrix} t = \cos 2x, \\ dt = (\cos 2x)' dx = -2 \sin 2x dx \\ \sin 2x dx = -\frac{dt}{2} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t} = \frac{\ln |t|}{4} + D_1 = \frac{\ln |\cos 2x|}{4} + D_1,$$

$$C_2(x) = \frac{1}{2} \int dx = \frac{x}{2} + D_2.$$

3) Подставив найденные функции в формулу (3.21), получим

$$y = \left(\frac{\ln |\cos 2x|}{4} + D_1 \right) \cos 2x + \left(\frac{x}{2} + D_2 \right) \sin 2x,$$

$$y = D_1 \cos 2x + D_2 \sin 2x + \frac{\cos 2x \ln |\cos 2x|}{4} + \frac{x \sin 2x}{2}$$

— общее решение уравнения (3.20).

Ответ: $y = D_1 \cos 2x + D_2 \sin 2x + \frac{\cos 2x \ln |\cos 2x|}{4} + \frac{x \sin 2x}{2}.$

Пример 3.11. Решить уравнение

$$y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{x^3}. \quad (3.22)$$

Решение:

1) Сначала найдем решение линейного однородного уравнения

$$y'' - 4y' + 4y = 0,$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda_0 = 2 - \text{действительный корень кратности } 2 \Rightarrow$$

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}.$$

2) Решение уравнения (3.22) будем искать в виде

$$y = C_1(x)e^{2x} + C_2(x)xe^{2x}, \quad (3.23)$$

где $C_1(x)$, $C_2(x)$ — некоторые неизвестные функции. Искомые функции $C_1(x)$, $C_2(x)$ должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{2x} + C_2'(x)xe^{2x} = 0 \\ C_1'(x)(e^{2x})' + C_2'(x)(xe^{2x})' = \frac{e^{2x}}{x^3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1'(x)e^{2x} + C_2'(x)xe^{2x} = 0 \\ 2C_1'(x)e^{2x} + C_2'(x)e^{2x}(1+2x) = \frac{e^{2x}}{x^3} \end{cases}.$$

Разделив оба уравнения на e^{2x} , решим полученную систему методом Крамера:

$$\begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x)x = 0 \\ 2C_1'(x) + C_2'(x)(1+2x) = \frac{1}{x^3} \end{cases},$$

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} 1 & x \\ 2 & 1+2x \end{vmatrix} = 1 + 2x - 2x = 1,$$

$$\Delta_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & x \\ \frac{1}{x^3} & 1+2x \end{vmatrix} = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow C_1'(x) = \frac{\Delta_1(x)}{\Delta(x)} = -\frac{1}{x^2},$$

$$\Delta_2(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & \frac{1}{x^3} \end{vmatrix} = \frac{1}{x^3} \Rightarrow C_2'(x) = \frac{\Delta_2(x)}{\Delta(x)} = \frac{1}{x^3}.$$

Проинтегрировав полученные соотношения, найдем $C_1(x)$ и $C_2(x)$:

$$C_1(x) = -\int \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{x} + D_1,$$

$$C_2(x) = \int \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2} + D_2.$$

Подставив найденные функции в формулу (3.23), получим

$$y = \left(\frac{1}{x} + D_1\right)e^{2x} + \left(-\frac{1}{2x^2} + D_2\right)xe^{2x},$$

$$y = D_1e^{2x} + D_2xe^{2x} + \frac{e^{2x}}{2x}$$

— общее решение уравнения (3.22).

Ответ: $y = D_1e^{2x} + D_2xe^{2x} + \frac{e^{2x}}{2x}.$

Задачи для самостоятельного решения

3.2.1. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$

$$3.2.2. \quad y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$3.2.3. \quad y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x$$

$$3.2.4. \quad y'' + 4y = \frac{1}{\cos^3 2x}$$

$$3.2.5. \quad y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^x}$$

$$3.2.6. \quad y'' + y = \operatorname{tg}^2 x$$

$$3.2.7. \quad y'' - 4y = 16x^2 e^{2x^2}$$

Ответы к задачам для самостоятельного решения

$$3.2.1. \quad y = C_1 e^x + C_2 x e^x + x e^x \ln |x|$$

$$3.2.2. \quad y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + e^{-x} (\sqrt{4-x^2} + x \arcsin(x/2))$$

$$3.2.3. \quad y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} + \frac{x^2 e^{-2x} (2 \ln x - 3)}{4}$$

$$3.2.4. \quad y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{\operatorname{tg} 2x \sin 2x}{4} - \frac{1}{\cos 2x}$$

$$3.2.5. \quad y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + (e^{-x} + e^{-2x}) \ln(1+e^x)$$

$$3.2.6. \quad y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \sin x \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| - 2$$

$$3.2.7. \quad y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + e^{2x^2}$$

3.2.2 Метод неопределенных коэффициентов

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение n -го порядка

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f(x), \quad (3.24)$$

где $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ — действительные числа, а $f(x) \not\equiv 0$ — некоторая непрерывная функция, и соответствующее линейное однородное уравнение

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0. \quad (3.25)$$

Теорема 3.2 (о структуре общего решения линейного неоднородного уравнения). *Общее решение линейного неоднородного уравнения (3.24) есть сумма общего решения соответствующего однородного уравнения (3.25) и любого частного решения неоднородного уравнения (3.24):*

$$y_{o.n.} = y_{o.o.} + y_{ч.н.}$$

В предыдущем пункте указывалось, как найти $y_{o.n.}$ (или $y_{ч.н.}$) для линейного неоднородного уравнения 2-го порядка методом вариации произвольных постоянных. Однако этот метод часто приводит к длинным выкладкам (особенно для уравнений более высоких порядков). Для некоторых простых правых частей $f(x)$ частное решение неоднородного уравнения $y_{ч.н.}$ можно подобрать. Метод подбора обычно называют **методом неопределенных коэффициентов**. Правые части, для которых возможен подбор, и соответствующие им частные решения указаны в таблице:

№	Правая часть $f(x)$	Частное решение
1.	$f(x) = C$ $\lambda = 0$ не явл. корнем хар. ур. $\lambda = 0$ — корень хар. ур. кратн. k	$y_{ч.н.} = A$ $y_{ч.н.} = Ax^k$
2.	$f(x) = ax + b$ $\lambda = 0$ не явл. корнем хар. ур. $\lambda = 0$ — корень хар. ур. кратн. k	$y_{ч.н.} = Ax + B$ $y_{ч.н.} = (Ax + B)x^k$
3.	$f(x) = ax^2 + bx + c$ $\lambda = 0$ не явл. корнем хар. ур. $\lambda = 0$ — корень хар. ур. кратн. k	$y_{ч.н.} = Ax^2 + Bx + C$ $y_{ч.н.} = (Ax^2 + Bx + C)x^k$
4.	$f(x) = P_m(x)$ — многочлен степени m $\lambda = 0$ не явл. корнем хар. ур. $\lambda = 0$ — корень хар. ур. кратн. k	$y_{ч.н.} = Q_m(x)$ $y_{ч.н.} = Q_m(x)x^k$
5.	$f(x) = Ce^{ax}$ $\lambda = a$ не явл. корнем хар. ур. $\lambda = a$ — корень хар. ур. кратн. k	$y_{ч.н.} = Ae^{ax}$ $y_{ч.н.} = Ae^{ax}x^k$
6.	$f(x) = P_m(x)e^{\alpha x}$ $\lambda = \alpha$ не явл. корнем хар. ур. $\lambda = \alpha$ — корень хар. ур. кратн. k	$y_{ч.н.} = Q_m(x)e^{\alpha x}$ $y_{ч.н.} = Q_m(x)x^k e^{\alpha x}$
7.	$f(x) = a \cos \beta x + b \sin \beta x$ $\lambda = \pm i\beta$ не явл. корнем хар. ур. $\lambda = \pm i\beta$ — корень хар. ур. кратн. k	$y_{ч.н.} = A \cos \beta x + B \sin \beta x$ $y_{ч.н.} = (A \cos \beta x + B \sin \beta x)x^k$
8.	$f(x) = P_m(x) \cos \beta x + Q_n(x) \sin \beta x$ $\lambda = \pm i\beta$ не явл. корнем хар. ур. $\lambda = \pm i\beta$ — корень хар. ур. кратн. k	$s = \max\{m, n\}$ $y_{ч.н.} = T_s(x) \cos \beta x + R_s(x) \sin \beta x$ $y_{ч.н.} = (T_s(x) \cos \beta x + R_s(x) \sin \beta x)x^k$
9.	$f(x) = e^{\alpha x}(P_m(x) \cos \beta x + Q_n(x) \sin \beta x)$ $\lambda = \alpha \pm i\beta$ не явл. корнем хар. ур. $\lambda = \alpha \pm i\beta$ — корень хар. ур. кратн. k	$s = \max\{m, n\}$ $y_{ч.н.} = e^{\alpha x}(T_s(x) \cos \beta x + R_s(x) \sin \beta x)$ $y_{ч.н.} = e^{\alpha x}(T_s(x) \cos \beta x + R_s(x) \sin \beta x)x^k$

Пример 3.12. Решить уравнение

$$y'' - 4y = 12. \quad (3.26)$$

Решение:

1) Общее решение однородного уравнения:

$$\begin{aligned} y'' - 4y &= 0, \\ \lambda^2 - 4 &= 0 \Rightarrow \lambda = \pm 2 \text{ — действительные корни кратности 1} \Rightarrow \\ y_{o.o.} &= C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}. \end{aligned}$$

2) Частное решение неоднородного уравнения:

$$\left. \begin{aligned} a) \text{ правая часть уравнения (3.26) } f(x) &= 12 \text{ — константа} \\ b) \lambda = 0 \text{ не является корнем характеристического уравнения} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

частное решение неоднородного уравнения подбираем в виде

$$y_{ч.н.} = A,$$

где A — неизвестный коэффициент. Для того, чтобы найти значение коэффициента A , подставим $y_{ч.н.}$ в уравнение (3.26):

$$\begin{aligned} (A)'' - 4A &= 12 \Rightarrow A = -3 \Rightarrow \\ y_{ч.н.} &= -3. \end{aligned}$$

3) Общее решение неоднородного уравнения:

$$\begin{aligned} y_{o.n.} &= y_{o.o.} + y_{ч.н.} \\ y_{o.n.} &= C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} - 3. \end{aligned}$$

Ответ: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} - 3.$

Пример 3.13. Решить уравнение

$$y''' - y'' = 2. \quad (3.27)$$

Решение:

1) Общее решение однородного уравнения:

$$\begin{aligned} y''' - y'' &= 0, \\ \lambda^3 - \lambda^2 &= 0 \Leftrightarrow \lambda^2(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \\ \left[\begin{aligned} \lambda &= 0 \text{ — действительный корень кратности 2} \\ \lambda &= 1 \text{ — действительный корень кратности 1} \end{aligned} \right. &\Rightarrow \\ y_{o.o.} &= C_1 + C_2 x + C_3 e^x. \end{aligned}$$

2) Частное решение неоднородного уравнения:

$$\left. \begin{aligned} a) \text{ правая часть уравнения (3.27) } f(x) &= 2 \text{ — константа} \\ b) \lambda = 0 \text{ — корень характеристического уравнения кратности 2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

частное решение неоднородного уравнения подбираем в виде

$$y_{ч.н.} = Ax^2,$$

где A — неизвестный коэффициент. Для того, чтобы найти значение коэффициента A , подставим $y_{ч.н.}$ в уравнение (3.27):

$$\begin{aligned} (Ax^2)''' - (Ax^2)'' &= 2, \\ 0 - 2A &= 2 \Rightarrow A = -1 \Rightarrow \\ y_{ч.н.} &= -x^2. \end{aligned}$$

3) Общее решение неоднородного уравнения:

$$\begin{aligned} y_{о.н.} &= y_{о.о.} + y_{ч.н.} \\ y_{о.н.} &= C_1 + C_2x + C_3e^x - x^2. \end{aligned}$$

Ответ: $y = C_1 + C_2x + C_3e^x - x^2$.

Пример 3.14. Решить уравнение

$$y'' + y = x. \quad (3.28)$$

Решение:

1) Общее решение однородного уравнения:

$$\begin{aligned} y'' + y &= 0, \\ \lambda^2 + 1 &= 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = -1 \Rightarrow \\ \lambda &= \pm i \text{ — мнимые корни кратности 1} \Rightarrow \\ y_{о.о.} &= C_1 \cos x + C_2 \sin x. \end{aligned}$$

2) Частное решение неоднородного уравнения:

$$\left. \begin{aligned} a) \text{ правая часть уравнения (3.28) } f(x) = x \text{ — многочлен 1 степени} \\ b) \lambda = 0 \text{ не является корнем характеристического уравнения} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

частное решение неоднородного уравнения подбираем в виде

$$y_{ч.н.} = Ax + B,$$

где A и B — неизвестные коэффициенты. Для того, чтобы найти значения коэффициентов A и B , подставим $y_{ч.н.}$ в уравнение (3.28):

$$\begin{aligned} (Ax + B)'' + (Ax + B) &= x, \\ Ax + B &= x. \end{aligned}$$

Полученное равенство является тождественным, то есть оно верно при любом значении переменной x . Известно, что два многочлена тождественно равны тогда и только

тогда, когда равны коэффициенты этих многочленов при соответствующих степенях x . Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа, получаем

$$\begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \end{cases} \Rightarrow y_{\text{ч.н.}} = x.$$

3) Общее решение неоднородного уравнения:

$$\begin{aligned} y_{o.n.} &= y_{o.o.} + y_{\text{ч.н.}} \\ y_{o.n.} &= C_1 \cos x + C_2 \sin x + x. \end{aligned}$$

Ответ: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x$.

Пример 3.15. Решить уравнение

$$y''' + 2y'' = 12x + 2. \quad (3.29)$$

Решение:

1) Общее решение однородного уравнения:

$$\begin{aligned} y''' + 2y'' &= 0, \\ \lambda^3 + 2\lambda^2 &= 0 \Leftrightarrow \lambda^2(\lambda + 2) = 0 \Rightarrow \\ \left[\begin{array}{l} \lambda = 0 \text{ — действительный корень кратности } 2 \\ \lambda = -2 \text{ — действительный корень кратности } 1 \end{array} \right] &\Rightarrow \\ y_{o.o.} &= C_1 + C_2x + C_3e^{-2x}. \end{aligned}$$

2) Частное решение неоднородного уравнения:

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) правая часть уравнения (3.29) } f(x) = 12x + 2 \text{ — многочлен 1 степени} \\ \text{b) } \lambda = 0 \text{ — корень характеристического уравнения кратности 2} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

частное решение неоднородного уравнения подбираем в виде

$$y_{\text{ч.н.}} = (Ax + B)x^2 = Ax^3 + Bx^2,$$

где A и B — неизвестные коэффициенты. Для того, чтобы найти значения коэффициентов A и B , подставим $y_{\text{ч.н.}}$ в уравнение (3.29):

$$\begin{aligned} (Ax^3 + Bx^2)''' + 2(Ax^3 + Bx^2)'' &= 12x + 2, \\ 6A + 12Ax + 2B &= 12x + 2. \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа, получаем

$$\begin{cases} 12A = 12 \\ 6A + 2B = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -2. \end{cases} \Rightarrow y_{\text{ч.н.}} = x^3 - 2x^2.$$

3) Общее решение неоднородного уравнения:

$$\begin{aligned} y_{o.n.} &= y_{o.o.} + y_{\text{ч.н.}} \\ y_{o.n.} &= C_1 + C_2x + C_3e^{-2x} + x^3 - 2x^2. \end{aligned}$$

Ответ: $y = C_1 + C_2x + C_3e^{-2x} + x^3 - 2x^2$.

Пример 3.16. Решить уравнение

$$y'' + 2y' + 10y = 20x^2 - 12x. \quad (3.30)$$

Решение:

1) Общее решение однородного уравнения:

$$\begin{aligned} y'' + 2y' + 10y &= 0, \\ \lambda^2 + 2\lambda + 10 &= 0 \Rightarrow \\ \lambda &= -1 \pm 3i \text{ — комплексно-сопряженные корни кратности 1} \Rightarrow \\ y_{o.o.} &= C_1 e^{-x} \cos 3x + C_2 e^{-x} \sin 3x. \end{aligned}$$

2) Частное решение неоднородного уравнения:

$$\left. \begin{aligned} a) \text{ правая часть уравнения (3.30) } f(x) &= 20x^2 - 12x \text{ — многочлен 2 степени} \\ b) \lambda = 0 &\text{ не является корнем характеристического уравнения} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

частное решение неоднородного уравнения подбираем в виде

$$y_{ч.н.} = Ax^2 + Bx + C,$$

где A , B и C — неизвестные коэффициенты. Для того, чтобы найти значения коэффициентов, подставим $y_{ч.н.}$ в уравнение (3.30):

$$\begin{aligned} (Ax^2 + Bx + C)'' + 2(Ax^2 + Bx + C)' + 10(Ax^2 + Bx + C) &= 20x^2 - 12x, \\ 2A + 4Ax + 2B + 10Ax^2 + 10Bx + 10C &= 20x^2 - 12x. \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа, получаем

$$\begin{cases} 10A = 20 \\ 4A + 10B = -12 \\ 2A + 2B + 10C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = -2 \\ C = 0. \end{cases}$$

$$y_{ч.н.} = 2x^2 - 2x.$$

3) Общее решение неоднородного уравнения:

$$\begin{aligned} y_{o.n.} &= y_{o.o.} + y_{ч.н.} \\ y_{o.n.} &= C_1 e^{-x} \cos 3x + C_2 e^{-x} \sin 3x + 2x^2 - 2x. \end{aligned}$$

Ответ: $y = C_1 e^{-x} \cos 3x + C_2 e^{-x} \sin 3x + 2x^2 - 2x$.

Пример 3.17. Решить уравнение

$$y''' - y' = 3x^2 - 4x. \quad (3.31)$$

Решение:

1) Общее решение однородного уравнения:

$$\begin{aligned} y''' - y' &= 0, \\ \lambda^3 - \lambda &= 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda^2 - 1) = 0 \Rightarrow \\ \begin{bmatrix} \lambda = 0 \\ \lambda = \pm 1 \end{bmatrix} &\text{ — действительные корни кратности 1} \Rightarrow \\ y_{o.o.} &= C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x}. \end{aligned}$$

2) Частное решение неоднородного уравнения:

$$\left. \begin{array}{l} a) \text{ правая часть уравнения (3.31) } f(x) = 3x^2 - 4x \text{ — многочлен 2 степени} \\ b) \lambda = 0 \text{ — корень характеристического уравнения кратности 1} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

частное решение неоднородного уравнения подбираем в виде

$$y_{\text{ч.н.}} = (Ax^2 + Bx + C)x = Ax^3 + Bx^2 + Cx,$$

где A , B и C — неизвестные коэффициенты. Для того, чтобы найти значения коэффициентов, подставим $y_{\text{ч.н.}}$ в уравнение (3.31):

$$\begin{aligned} (Ax^3 + Bx^2 + Cx)''' - (Ax^3 + Bx^2 + Cx)' &= 3x^2 - 4x, \\ 6A - 3Ax^2 - 2Bx - C &= 3x^2 - 4x. \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа, получаем

$$\left\{ \begin{array}{l} -3A = 3 \\ -2B = -4 \\ 6A - C = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = -1 \\ B = 2 \\ C = -6. \end{array} \right.$$

Следовательно,

$$y_{\text{ч.н.}} = -x^3 + 2x^2 - 6x.$$

3) Общее решение неоднородного уравнения:

$$\begin{aligned} y_{\text{о.н.}} &= y_{\text{о.о.}} + y_{\text{ч.н.}} \\ y_{\text{о.н.}} &= C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x} - x^3 + 2x^2 - 6x. \end{aligned}$$

Ответ: $y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x} - x^3 + 2x^2 - 6x$.

Пример 3.18. Решить уравнение

$$y'' + 3y' + 2y = e^{3x}. \quad (3.32)$$

Решение:

1) Общее решение однородного уравнения:

$$\begin{aligned} y'' + 3y' + 2y &= 0, \\ \lambda^2 + 3\lambda + 2 &= 0 \Rightarrow \\ \left[\begin{array}{l} \lambda = -1 \\ \lambda = -2 \end{array} \right. &\text{ — действительные корни кратности 1} \Rightarrow \\ y_{\text{о.о.}} &= C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}. \end{aligned}$$

2) Частное решение неоднородного уравнения:

$$\left. \begin{array}{l} a) \text{ правая часть уравнения (3.32) } f(x) = e^{3x} \\ b) \lambda = 3 \text{ не является корнем характеристического уравнения} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

частное решение неоднородного уравнения подбираем в виде

$$y_{ч.н.} = Ae^{3x},$$

где A — неизвестный коэффициент. Для того, чтобы найти значение коэффициента A , подставим $y_{ч.н.}$ в уравнение (3.32):

$$\begin{aligned}(Ae^{3x})'' + 3(Ae^{3x})' + 2Ae^{3x} &= e^{3x}, \\ 9Ae^{3x} + 9Ae^{3x} + 2e^{3x} &= e^{3x} \\ 20Ae^{3x} &= e^{3x}.\end{aligned}$$

Разделив обе части на e^{3x} , получим

$$20A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{20}.$$

Следовательно,

$$y_{ч.н.} = \frac{1}{20} e^{3x}.$$

3) Общее решение неоднородного уравнения:

$$\begin{aligned}y_{о.н.} &= y_{о.о.} + y_{ч.н.} \\ y_{о.н.} &= C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{20} e^{3x}.\end{aligned}$$

Ответ: $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{20} e^{3x}.$

Пример 3.19. Решить задачу Коши

$$y'' - 2y' = 2e^x, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 0. \quad (3.33)$$

Решение:

1) Общее решение однородного уравнения:

$$\begin{aligned}y'' - 2y' &= 0, \\ \lambda^2 - 2\lambda &= 0 \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{l} \lambda = 0 \\ \lambda = 2 \end{array} \right. \text{ — действительные корни кратности 1} \Rightarrow$$

$$y_{о.о.} = C_1 + C_2 e^{2x}.$$

2) Частное решение неоднородного уравнения:

$$\left. \begin{array}{l} a) \text{ правая часть уравнения (3.33) } f(x) = 2e^x \\ b) \lambda = 1 \text{ не является корнем характеристического уравнения} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

частное решение неоднородного уравнения подбираем в виде

$$y_{ч.н.} = Ae^x,$$

где A — неизвестный коэффициент. Для того, чтобы найти значение коэффициента A , подставим $y_{ч.н.}$ в уравнение (3.33):

$$\begin{aligned}(Ae^x)'' - 2(Ae^x)' &= 2e^x, \\ Ae^x - 2Ae^x &= 2e^x \\ -Ae^x &= 2e^x.\end{aligned}$$

Разделив обе части на e^x , получим

$$-A = 2 \Rightarrow A = -2.$$

Следовательно,

$$y_{ч.н.} = -2e^x.$$

3) Общее решение неоднородного уравнения:

$$\begin{aligned}y_{o.н.} &= y_{o.o.} + y_{ч.н.} \\ y_{o.н.} &= C_1 + C_2 e^{2x} - 2e^x.\end{aligned}\quad (3.34)$$

4) Найдем значения констант C_1 и C_2 . Для этого сначала посчитаем y' :

$$\begin{aligned}y &= C_1 + C_2 e^{2x} - 2e^x \Rightarrow \\ y' &= 2C_2 e^{2x} - 2e^x.\end{aligned}$$

Подставим в полученные соотношения начальные условия $x = 0$, $y = -1$, $y' = 0$:

$$\begin{aligned}\begin{cases} -1 &= C_1 + C_2 e^{2 \cdot 0} - 2e^0 \\ 0 &= 2C_2 e^{2 \cdot 0} - 2e^0 \end{cases} \Rightarrow \\ \begin{cases} -1 &= C_1 + C_2 - 2 \\ 0 &= 2C_2 - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 &= 0 \\ C_2 &= 1. \end{cases}\end{aligned}$$

Подставив найденные значения C_1 и C_2 в общее решение неоднородного уравнения (3.34), получим

$$y = e^{2x} - 2e^x$$

— решение задачи Коши (3.33).

Ответ: $y = e^{2x} - 2e^x$.

Пример 3.20. Решить уравнение

$$y'' - y' - 2y = 3e^{-x}. \quad (3.35)$$

Решение:

1) Общее решение однородного уравнения:

$$\begin{aligned}y'' - y' - 2y &= 0, \\ \lambda^2 - \lambda - 2 &= 0 \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda &= & -1 \\ \lambda &= & 2 \end{bmatrix} \text{ — действительные корни кратности 1 } \Rightarrow$$

$$y_{o.o.} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}.$$

2) Частное решение неоднородного уравнения:

$$\left. \begin{array}{l} a) \text{ правая часть уравнения (3.35) } f(x) = 3e^{-x} \\ b) \lambda = -1 \text{ — корень характеристического уравнения кратности 1} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

частное решение неоднородного уравнения подбираем в виде

$$y_{\text{ч.н.}} = Axe^{-x},$$

где A — неизвестный коэффициент. Для того, чтобы найти значение коэффициента A , подставим $y_{\text{ч.н.}}$ в уравнение (3.35):

$$\begin{aligned} (Axe^{-x})'' - (Axe^{-x})' - 2Axe^{-x} &= 3e^{-x}, \\ (Axe^{-x})' &= A(e^{-x} - xe^{-x}) = A(1-x)e^{-x}, \\ (Axe^{-x})'' &= (A(1-x)e^{-x})' = A(-e^{-x} - (1-x)e^{-x}) = A(x-2)e^{-x}, \\ A(x-2)e^{-x} - A(1-x)e^{-x} - 2Axe^{-x} &= 3e^{-x} \\ -3Ae^{-x} &= 3e^{-x}. \end{aligned}$$

Разделив обе части на e^{-x} , получим

$$-3A = 3 \Rightarrow A = -1.$$

Следовательно,

$$y_{\text{ч.н.}} = -xe^{-x}.$$

3) Общее решение неоднородного уравнения:

$$\begin{aligned} y_{\text{о.н.}} &= y_{\text{о.о.}} + y_{\text{ч.н.}} \\ y_{\text{о.н.}} &= C_1e^{-x} + C_2e^{2x} - xe^{-x}. \end{aligned}$$

Ответ: $y = C_1e^{-x} + C_2e^{2x} - xe^{-x}$.

Пример 3.21. Решить уравнение

$$y''' - 4y'' + 4y' = (x-1)e^x. \quad (3.36)$$

Решение:

1) Общее решение однородного уравнения:

$$\begin{aligned} y''' - 4y'' + 4y' &= 0, \\ \lambda^3 - 4\lambda^2 + 4\lambda &= 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = 0 \Rightarrow \\ \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \text{ — действительный корень кратности 1} \\ \lambda_2 = 2 \text{ — действительный корень кратности 2} \end{array} \right] &\Rightarrow \\ y_{\text{о.о.}} &= C_1 + C_2e^{2x} + C_3xe^{2x}. \end{aligned}$$

2) Частное решение неоднородного уравнения:

$$\left. \begin{array}{l} a) \text{ правая часть уравнения (3.33) } f(x) = (x-1)e^x \\ b) \lambda = 1 \text{ не является корнем характеристического уравнения} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

частное решение неоднородного уравнения подбираем в виде

$$y_{\text{ч.н.}} = (Ax + B)e^x,$$

где A и B — неизвестные коэффициенты. Для того, чтобы найти значения коэффициентов, подставим $y_{\text{ч.н.}}$ в уравнение (3.36):

$$\begin{aligned} ((Ax + B)e^x)''' - 4((Ax + B)e^x)'' + 4((Ax + B)e^x)' &= (x - 1)e^x, \\ ((Ax + B)e^x)' &= Ae^x + (Ax + B)e^x = (Ax + A + B)e^x, \\ ((Ax + B)e^x)'' &= ((Ax + A + B)e^x)' = Ae^x + (Ax + A + B)e^x = (Ax + 2A + B)e^x, \\ ((Ax + B)e^x)''' &= ((Ax + 2A + B)e^x)' = Ae^x + (Ax + 2A + B)e^x = (Ax + 3A + B)e^x, \\ (Ax + 3A + B)e^x - 4(Ax + 2A + B)e^x + 4(Ax + A + B)e^x &= (x - 1)e^x \\ (Ax - A + B)e^x &= (x - 1)e^x. \end{aligned}$$

Разделив обе части на e^x , и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа, получим

$$\begin{aligned} Ax - A + B &= x - 1, \\ \begin{cases} A &= 1 \\ -A + B &= -1 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} A &= 1 \\ B &= 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Следовательно,

$$y_{\text{ч.н.}} = xe^x.$$

3) Общее решение неоднородного уравнения:

$$\begin{aligned} y_{\text{о.н.}} &= y_{\text{о.о.}} + y_{\text{ч.н.}} \\ y_{\text{о.н.}} &= C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 x e^{2x} + x e^x. \end{aligned}$$

Ответ: $y = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 x e^{2x} + x e^x$.

3.2.3 Принцип наложения решений

Теорема 3.3. Если левая часть линейного неоднородного уравнения

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_m(x) \quad (3.37)$$

есть сумма нескольких функций, и $y_i(x)$, $1 \leq i \leq m$ — решения уравнений

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f_i(x), \quad 1 \leq i \leq m,$$

то сумма

$$y = y_1(x) + y_2(x) + \dots + y_m(x)$$

является решением уравнения (3.37).

Пример 3.22. Решить уравнение

$$y'' - 3y' = 2e^{2x} - 6x + 1. \quad (3.38)$$

Решение:

1) Общее решение однородного уравнения:

$$\begin{aligned} y'' - 3y' &= 0, \\ \lambda^2 - 3\lambda = 0 &\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 3 \end{cases} \text{ — действительные корни кратности 1 } \Rightarrow \\ y_{o.o.} &= C_1 + C_2 e^{3x}. \end{aligned}$$

2) Частное решение неоднородного уравнения:

$$\begin{aligned} a) \quad & \left. \begin{aligned} f_1(x) &= 2e^{2x} \\ \lambda = 2 &\text{ не является корнем характеристического уравнения} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\ & y_1(x) = Ae^{2x}, \\ b) \quad & \left. \begin{aligned} f_2(x) &= -6x + 1 \\ \lambda = 0 &\text{ корень характеристического уравнения кратности 1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\ & y_2(x) = (Bx + C)x = Bx^2 + Cx. \end{aligned}$$

Следовательно, $y_{ч.н.}$ ищем в виде

$$y_{ч.н.} = Ae^{2x} + Bx^2 + Cx.$$

Для того, чтобы найти значения коэффициентов, подставим $y_{ч.н.}$ в уравнение (3.38):

$$\begin{aligned} (Ae^{2x} + Bx^2 + Cx)'' - 3(Ae^{2x} + Bx^2 + Cx)' &= 2e^{2x} - 6x + 1, \\ (4Ae^{2x} + 2B) - 3(2Ae^{2x} + 2Bx + C) &= 2e^{2x} - 6x + 1, \\ -2Ae^{2x} - 6Bx + (2B - 3C) &= 2e^{2x} - 6x + 1. \end{aligned}$$

Приравняв коэффициенты при одноименных функциях слева и справа, получим

$$\begin{cases} -2A = 2 \\ -6B = -6 \\ 2B - 3C = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \\ C = 1 \end{cases} \Rightarrow \\ y_{ч.н.} = -e^{2x} + x^2 + x. \end{cases}$$

3) Общее решение неоднородного уравнения:

$$\begin{aligned} y_{o.n.} &= y_{o.o.} + y_{ч.н.} \\ y_{o.n.} &= C_1 + C_2 e^{3x} - e^{2x} + x^2 + x. \end{aligned}$$

Ответ: $y = C_1 + C_2 e^{3x} - e^{2x} + x^2 + x.$

Пример 3.23. Решить уравнение

$$y'' - 4y' + 5y = 10 \sin^2(x/2). \quad (3.39)$$

Решение:

1) Общее решение однородного уравнения:

$$\begin{aligned} y'' - 4y' + 5y &= 0, \\ \lambda^2 - 4\lambda + 5 &= 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 2 \pm i - \text{мнимые корни кратности 1} \Rightarrow \\ y_{o.o.} &= C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x. \end{aligned}$$

2) Частное решение неоднородного уравнения:

$$\begin{aligned} f(x) &= 10 \sin^2(x/2) = 5 - 5 \cos x, \\ \left. \begin{aligned} a) \quad f_1(x) &= 5 \\ \lambda = 0 &\text{ не является корнем характеристического уравнения} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\ y_1(x) &= A, \\ \left. \begin{aligned} b) \quad f_2(x) &= -5 \cos x \\ \lambda = \pm i &\text{ не являются корнями характеристического уравнения} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\ y_2(x) &= B \cos x + C \sin x. \end{aligned}$$

Следовательно, $y_{ч.н.}$ ищем в виде

$$y_{ч.н.} = A + B \cos x + C \sin x.$$

Для того, чтобы найти значения коэффициентов, подставим $y_{ч.н.}$ в уравнение (3.39):

$$(A + B \cos x + C \sin x)'' - 4(A + B \cos x + C \sin x)' + 5(A + B \cos x + C \sin x) = 5 - 5 \cos x,$$

$$\begin{aligned} (-B \cos x - C \sin x) - 4(-B \sin x + C \cos x) + 5(A + B \cos x + C \sin x) &= 5 - 5 \cos x, \\ (4B - 4C) \cos x + (4B + 4C) \sin x + 5A &= 5 - 5 \cos x. \end{aligned}$$

Приравняв коэффициенты при одноименных функциях слева и справа, получим

$$\begin{aligned} \begin{cases} 4B - 4C = -5 \\ 4B + 4C = 0 \\ 5A = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -5/8 \\ C = 5/8 \end{cases} \Rightarrow \\ y_{ч.н.} = 1 - 5/8 \cos x + 5/8 \sin x. \end{aligned}$$

3) Общее решение неоднородного уравнения:

$$\begin{aligned} y_{o.n.} &= y_{o.o.} + y_{ч.н.} \\ y_{o.n.} &= C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x + 1 - 5/8 \cos x + 5/8 \sin x. \end{aligned}$$

Ответ: $y = C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x + 1 - 5/8 \cos x + 5/8 \sin x.$

Задачи для самостоятельного решения

3.3.1. $y'' + 16y = 32 \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

3.3.2. $y'' - 3y' + 2y = 5$

3.3.3. $y''' + 9y'' = 3$

3.3.4. $y''' - 6y'' + 9y' = 15$

3.3.5. $y'' + 4y = 8x + 20$

3.3.6. $y'' + y' - 6y = x + 1$

3.3.7. $y'' + 2y' - 3y = -6x^2 - x + 13$

3.3.8. $y'' + 2y' + 10y = 20x - 26$

3.3.9. $y'' - y' = 3x^2$

3.3.10. $y''' + 9y'' = 3x$

3.3.11. $y''' + 2y'' + 10y' = 30x^2 + 12x + 26$

3.3.12. $y'' + 3y' = e^{-x} \quad y(0) = y'(0) = 1/2$

3.3.13. $y'' + 2y' + 2y = 5e^{2x}$

3.3.14. $y''' - 3y'' + 2y' = 6e^{3x}$

3.3.15. $y'' + 16y = 10e^{-2x}$

3.3.16. $y''' + 5y'' + 6y' = e^x$

3.3.17. $y'' - 2y' - 3y = -8e^{-x}$

3.3.18. $y'' + 2y' - 2y = (12x + 15)e^{2x}$

3.3.19. $y'' - 2y' + y = 6xe^x$

3.3.20. $y'' + 4y' + 5y = \sin x$

3.3.21. $y'' + y' - 2y = \cos 2x$

3.3.22. $y'' + y' + 5y = -\sin 2x$

3.3.23. $y'' + y = -8 \cos 3x + 24 \sin 3x$

3.3.24. $y'' + 2y' + 10y = \sin 3x + 2 \cos 3x$

3.3.25. $y'' + 36y = e^{-x} + 6$

3.3.26. $y'' - 6y' + 9y = 8e^{-x} + 9x$

3.3.27. $y''' + 4y' = 16e^{2x} + 8$

$$3.3.28. \quad y^{IV} - 2y''' + y'' = 72e^{3x} + 6$$

$$3.3.29. \quad y'' - 2y' - 8 = e^x - 8 \cos 2x$$

$$3.3.30. \quad y'' - 3y' = x + \cos x$$

Ответы к задачам для самостоятельного решения

$$3.3.1. \quad y = 2 - \cos 4x$$

$$3.3.2. \quad y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + 5/2$$

$$3.3.3. \quad y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-9x} + x^2/6$$

$$3.3.4. \quad y = C_1 + C_2 e^{3x} + C_3 x e^{3x} + 5x/3$$

$$3.3.5. \quad y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + 2x + 5$$

$$3.3.6. \quad y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x} - x/6 - 7/36$$

$$3.3.7. \quad y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x + 2x^2 + 3x - 1$$

$$3.3.8. \quad y = C_1 e^{-x} \cos 3x + C_2 e^{-x} \sin 3x + 2x - 3$$

$$3.3.9. \quad y = C_1 + C_2 e^x - x^3 - 3x^2 - 6x$$

$$3.3.10. \quad y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-9x} + 1/18 x^3 - 1/54 x^2$$

$$3.3.11. \quad y = C_1 + C_2 e^{-x} \cos 3x + C_3 e^{-x} \sin 3x + x^3 + 2x$$

$$3.3.12. \quad y = 1 - e^{-x}/2$$

$$3.3.13. \quad y = C_1 e^{-x} \cos x + C_2 e^{-x} \sin x + e^{2x}/2$$

$$3.3.14. \quad y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{2x} + E^{3x}$$

$$3.3.15. \quad y = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x + e^{-2x}/2$$

$$3.3.16. \quad y = C_1 + C_2 e^{-3x} + C_3 e^{-2x} + e^x/12$$

$$3.3.17. \quad y + C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} + 2x e^{-x}$$

$$3.3.18. \quad y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + 3x e^{2x}$$

$$3.3.19. \quad y = C_1 e^x + C_2 x e^x = x^3 e^x$$

$$3.3.20. \quad y = C_1 e^{-2x} \cos x + C_2 e^{-2x} \sin x + 1/8 \sin x - 1/8 \cos x$$

$$3.3.21. \quad y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + 1/20 \sin 2x - 3/20 \cos 2x$$

$$3.3.22. \quad y = C_1 e^{-x} \cos 2x + C_2 e^{-x} \sin 2x + 4/17 \cos 2x - 1/17 \sin 2x$$

$$3.3.23. \quad y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \cos 3x - 3 \sin 3x$$

$$3.3.24. \quad y = C_1 e^{-x} \cos 3x + C_2 e^{-x} \sin 3x - 4/37 \cos 3x + 13/37 \sin 3x$$

$$3.3.25. \quad y = C_1 \cos 6x + C_2 \sin 6x + e^{-x}/37 + 1/6$$

$$3.3.26. \quad y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} + e^{-x}/2 + x + 2/3$$

$$3.3.27. \quad y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + C_3 + e^{2x} + 2x$$

$$3.3.28. \quad y = C_1 + C_2 x + C_3 e^x + C_4 x e^x + 2e^{3x} + 3x^2$$

$$3.3.29. \quad y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{4x} - e^x/9 + 3/5 \cos 2x + 1/5 \sin 2x$$

$$3.3.30. \quad y = C_1 + C_2 e^{3x} - 1/10 \cos x - 3/10 \sin x - x^2/6 - x/9$$