

Тема 2.

Уравнения высших порядков

2.0. Основные определения и теоремы

Дифференциальное уравнение n -го порядка:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (2.1)$$

x — независимая переменная;

$y = y(x)$ — искомая функция;

$y' = y'(x)$, $y'' = y''(x)$, $\dots$, $y^{(n)} = y^{(n)}(x)$ — ее производные.

Порядок уравнения — порядок n наивысшей производной, входящей в это уравнение.

Уравнение, разрешенное относительно производной:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}). \quad (2.2)$$

Частное решение дифференциального уравнения на интервале (a, b) — любая функция $y = \varphi(x)$, определенная на интервале (a, b) , имеющая на этом интервале производные до порядка n включительно и обращающая уравнение (2.1) (или (2.2)) в тождество:

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0$$

или

$$\varphi^{(n)}(x) \equiv f(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)).$$

Частный интеграл — частное решение, записанное в неявном виде

$$\Phi(x, y) = 0.$$

Интегральная кривая — график частного решения (частного интеграла).

Общее решение дифференциального уравнения — семейство функций

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$$

такое, что при любом фиксированном наборе значений параметров $C_1, C_2, \dots, C_n$ функция $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ является частным решением данного уравнения, и наоборот, любое частное решение может быть представлено в виде $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ при некоторых значениях параметров $C_1, C_2, \dots, C_n$.

Общий интеграл — общее решение, записанное в неявном виде:

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0.$$

Начальные условия:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad y''(x_0) = y_2, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{(n-1)}, \quad (2.3)$$

или

$$y|_{x=x_0} = y_0, \quad y'|_{x=x_0} = y_1, \quad y''|_{x=x_0} = y_2, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_{(n-1)},$$

где $x_0, y_0, y_1, \dots, y_{(n-1)}$ — некоторые числа.

Задача Коши для дифференциального уравнения n -го порядка: найти решение дифференциального уравнения

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}),$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad y''(x_0) = y_2, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{(n-1)}.$$

Теорема 2.1 (существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения второго порядка). *Рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения второго порядка:*

$$y'' = f(x, y, y'), \quad (2.4)$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1. \quad (2.5)$$

Если функция $f(x, y, y')$ непрерывна как функция аргументов x, y, y' в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0, y_1)$, то найдется интервал $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, на котором существует по крайней мере одно решение $y = \varphi(x)$ уравнения (2.4), удовлетворяющее начальным условиям (2.5).

Если кроме того функция $f(x, y, y')$ имеет ограниченные частные производные $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}$ в указанной окрестности точки M_0 , то такое решение единственно.

2.1. Уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$.

Пусть дано дифференциальное уравнение n -го порядка

$$y^{(n)} = f(x). \quad (2.6)$$

Алгоритм решения: проинтегрируем равенство n раз

$$y^{(n-1)} = \int f(x) dx + C_1,$$

$$y^{(n-2)} = \int \left(\int f(x) dx \right) dx + C_1 x + C_2,$$

...

$$y = \underbrace{\int \left(\dots \int f(x) dx \dots \right) dx}_{n \text{ раз}} + \tilde{C}_1 x^{n-1} + \tilde{C}_2 x^{n-2} + \dots + \tilde{C}_n$$

— общее решение уравнения (2.6).

Пример 1. Решить уравнение

$$y'' = x \sin x.$$

Решение:

$$y' = \int x \sin x dx = \left| \begin{array}{l} \int u dv = uv - \int v du \\ u = x, \quad du = dx \\ dv = \sin x dx, \quad v = \int \sin x dx = -\cos x \end{array} \right|$$

$$= -x \cos x + \int \cos x dx + C_1 = -x \cos x + \sin x + C_1,$$

$$y = \int (-x \cos x + \sin x + C_1) dx = - \int x \cos x dx - \cos x + C_1 x + C_2$$

$$= \left| \begin{array}{l} \int u dv = uv - \int v du \\ u = x, \quad du = dx \\ dv = \cos x dx, \quad v = \int \cos x dx = \sin x \end{array} \right|$$

$$= -(x \sin x - \int \sin x dx) - \cos x + C_1 x + C_2 = -x \sin x - 2 \cos x + C_1 x + C_2.$$

Ответ: $y = -x \sin x - 2 \cos x + C_1 x + C_2$.

Пример 2. Решить задачу Коши

$$y'' = 4 \cos 2x, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Решение:

Проинтегрируем уравнение:

$$y' = \int 4 \cos 2x dx = 2 \sin 2x + C_1.$$

Подставив начальное условие $y'(0) = 0$, найдем значение константы C_1 :

$$0 = 2 \sin 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = 0,$$

$$y' = 2 \sin 2x.$$

Проинтегрируем полученное равенство:

$$y = \int 2 \sin 2x dx = -\cos 2x + C_2.$$

Подставив начальное условие $y(0) = 0$, найдем значение константы C_2 :

$$0 = -\cos 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = 1,$$

$$y = -\cos 2x + 1.$$

Ответ: $y = -\cos 2x + 1$.

Пример 3. Решить задачу Коши

$$y''' = \frac{6}{x^3}, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = y''(1) = 1.$$

Решение:

Проинтегрируем уравнение:

$$y'' = 6 \int \frac{dx}{x^3} = -\frac{3}{x^2} + C_1.$$

Подставив начальное условие $y''(1) = 1$, найдем значение константы C_1 :

$$1 = -\frac{3}{1} + C_1 \Rightarrow C_1 = 4,$$

$$y'' = -\frac{3}{x^2} + 4.$$

Проинтегрируем полученное равенство:

$$y' = \int \left(-\frac{3}{x^2} + 4 \right) dx = \frac{3}{x} + 4x + C_2.$$

Подставив начальное условие $y'(1) = 1$, найдем значение константы C_2 :

$$1 = \frac{3}{1} + 4 + C_2 \Rightarrow C_2 = -6,$$

$$y' = \frac{3}{x} + 4x - 6.$$

Снова интегрируем:

$$y = \int \left(\frac{3}{x} + 4x - 6 \right) dx = 3 \ln |x| + 2x^2 - 6x + C_3.$$

Подставив начальное условие $y(1) = 2$, найдем значение константы C_3 :

$$2 = 3 \ln 1 + 4 - 6 + C_3 \Rightarrow C_3 = 6,$$

$$y = 3 \ln |x| + 2x^2 - 6x + 6.$$

Ответ: $y = 3 \ln |x| + 2x^2 - 6x + 6$.

Пример 4. Для уравнения

$$y''' = 0$$

задать начальные условия и решить полученную задачу Коши.

Решение:

1) Пусть $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$. Очевидно (проверяется подстановкой в исходное уравнение), что решение полученной задачи

$$y = 0.$$

2) Выберем другие начальные условия: $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 4$. Тогда:

$$\begin{aligned} y'' &= \int 0 dx = C_1, \\ y''(0) &= 4 \Rightarrow C_1 = 4, \\ y'' &= 4, \\ y' &= 4 \int dx = 4x + C_2, \\ y'(0) &= 2 \Rightarrow C_2 = 2, \\ y' &= 4x + 2, \\ y &= \int (4x + 2) dx = 2x^2 + 2x + C_3, \\ y(0) &= 1 \Rightarrow C_3 = 1, \\ y &= 2x^2 + 2x + 1. \end{aligned}$$

Ответ: $y = 2x^2 + 2x + 1$.

Задачи для самостоятельного решения

2.1.1. $y'' = x + 3$, $y(2) = 4$, $y'(2) = 3$

2.1.2. $y'' = x^2 - 3x + 2 + 2e^{2x}$

2.1.3. $y'' = \frac{8}{x^4} + 3x - 1$

2.1.4. $y''' = \frac{24}{(x+2)^5}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 1$

2.1.5. $y''' \sin^4 x = \sin 2x$

2.1.6. $y'' = 9 \sin 3x$ — задать начальные условия и решить полученную задачу Коши

2.1.7. $y''' = 16e^{4x}$ — задать начальные условия и решить полученную задачу Коши

Ответы к задачам для самостоятельного решения

2.1.1. $y = \frac{x^3}{6} + \frac{3x^2}{2} - 5x + \frac{20}{3}$

2.1.2. $y = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{2} + x^2 + \frac{e^{2x}}{2} + C_1x + C_2$

2.1.3. $y = \frac{4}{3x^2} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{2} + C_1x + C_2$

2.1.4. $y = -\frac{1}{(x+2)^2} + \frac{11x^2}{16} + \frac{7x}{4} + \frac{5}{4}$

2.1.5. $y = \ln |\sin x| + C_1x^2 + C_2x + C_3$

2.2. Уравнения вида $F(x, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$.

Пусть дано дифференциальное уравнение n -го порядка

$$F(x, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0. \quad (2.7)$$

Алгоритм решения:

1) Сделаем в уравнении (2.7) подстановку

$$y^{(n-1)}(x) = z(x), \quad y^{(n)}(x) = z'(x),$$

получим

$$F(x, z, z') = 0$$

— уравнение первого порядка относительно неизвестной функции $z(x)$. Найдём его общее решение

$$z = \varphi(x, C_1).$$

2) Сделав обратную подстановку, получим

$$y^{(n-1)} = \varphi(x, C_1)$$

— уравнение вида (2.6). После $(n-1)$ -кратного интегрирования получим

$$y = \psi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$$

— общее решение уравнения (2.7).

Пример 5. Решить задачу Коши

$$y' = y''x \ln x, \quad y(e) = 0, \quad y'(e) = 1.$$

Решение:

1) Сделаем в уравнении подстановку

$$y' = z, \quad y'' = z',$$

получим

$$z = z'x \ln x$$

— уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Решим его:

$$z = \frac{dz}{dx} x \ln x, \quad | \cdot dx$$

$$z dx = x \ln x dz, \quad | \div z x \ln x$$

$$\frac{dx}{x \ln x} = \frac{dz}{z},$$

$$\int \frac{dx}{x \ln x} = \int \frac{dz}{z}.$$

Вычислим интеграл в левой части

$$\int \frac{dx}{x \ln x} = \left| \begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = (\ln x)' dx = \frac{dx}{x} \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln |\ln x| + C.$$

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} \ln |z| &= \ln |\ln x| + \ln |C_1| = \ln |C_1 \ln x|, \\ z &= C_1 \ln x, \quad C_1 \neq 0. \end{aligned}$$

2) Сделав обратную подстановку $z = y'$, получим

$$y' = C_1 \ln x.$$

Используя начальное условие $y'(e) = 1$, найдем значение константы C_1 :

$$\begin{aligned} 1 &= C_1 \ln e \Rightarrow C_1 = 1, \\ y' &= \ln x. \end{aligned}$$

Проинтегрируем полученное равенство:

$$\begin{aligned} y = \int \ln x dx &= \left| \begin{array}{l} \int u dv = uv - \int v du \\ u = \ln x, \quad du = (\ln x)' dx = \frac{dx}{x} \\ dv = dx, \quad v = \int dx = x \end{array} \right| \\ &= x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C_2. \end{aligned}$$

Подставив начальное условие $y(e) = 0$, найдем значение константы C_2 :

$$\begin{aligned} 0 &= e \ln e - e + C_2 \Rightarrow C_2 = 0, \\ y &= x \ln x - x. \end{aligned}$$

Ответ: $y = x \ln x - x$.

Пример 6. Решить задачу Коши

$$2xy'y'' = 1 + (y')^2, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1.$$

Решение:

1) Сделаем в уравнении подстановку

$$y' = z, \quad y'' = z',$$

получим

$$xz z' = 1 + z^2$$

— уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Решим его:

$$\begin{aligned} 2xz \frac{dz}{dx} &= 1 + z^2, & | \cdot dx \\ 2xz dz &= (1 + z^2) dx, & | \div x(1 + z^2) \\ \frac{2z dz}{1 + z^2} &= \frac{dx}{x}, \\ \int \frac{2z dz}{1 + z^2} &= \int \frac{dx}{x}. \end{aligned}$$

Вычислим интеграл в левой части

$$\int \frac{2z dz}{1 + z^2} = \left| \begin{array}{l} t = 1 + z^2 \\ dt = (1 + z^2)' dz = 2z dz \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln(1 + z^2) + C.$$

Таким образом, получаем:

$$\begin{aligned} \ln(1 + z^2) &= \ln |x| + \ln |C_1| = \ln |C_1 x|, \\ 1 + z^2 &= C_1 x. \end{aligned}$$

2) Сделав обратную подстановку $z = y'$, получим

$$\begin{aligned} 1 + (y')^2 &= C_1 x, \\ (y')^2 &= C_1 x - 1, \\ y' &= \pm \sqrt{C_1 x - 1} \end{aligned}$$

Используя начальное условие $y'(1) = 1$, найдем значение константы C_1 и выберем знак перед корнем:

$$\begin{aligned} 1 &= \pm \sqrt{C_1 - 1} \Rightarrow \text{выбираем знак “+”}, \\ C_1 &= 2, \\ y' &= \sqrt{2x - 1} \end{aligned}$$

Проинтегрируем полученное равенство:

$$\begin{aligned} y &= \int \sqrt{2x - 1} dx = \left| \begin{array}{l} t = 2x - 1 \\ dt = (2x - 1)' dx = 2 dx \\ dx = \frac{dt}{2} \end{array} \right| \\ &= \frac{1}{2} \int \sqrt{t} dt = \frac{t^{3/2}}{3} + C = \frac{t^{3/2} + C_2}{3} = \frac{(2x - 1)^{3/2} + C_2}{3}. \end{aligned}$$

Подставив начальное условие $y(1) = 0$, найдем значение константы C_2 :

$$0 = \frac{(2 - 1)^{3/2} + C_2}{3} \Rightarrow C_2 = -1.$$

Итак,

$$y = \frac{(2x - 1)^{3/2} - 1}{3}$$

искмое частное решение.

Ответ: $y = \frac{(2x - 1)^{3/2} - 1}{3}.$

Пример 7. Решить уравнение

$$y''' + y'' \operatorname{tg} x = \sin 2x. \quad (2.8)$$

Решение:

1) Сделаем в уравнении подстановку

$$y'' = z, \quad y''' = z',$$

получим

$$z' + z \operatorname{tg} x = \sin 2x \quad (2.9)$$

— линейное неоднородное уравнение первого порядка. Будем решать его методом Бернулли.

а) Пусть

$$\begin{aligned} z &= uv, \\ z' &= u'v + v'u. \end{aligned}$$

Подставляя данные соотношения в уравнение (2.8), получаем

$$\begin{aligned} (u'v + v'u) + uv \operatorname{tg} x &= \sin 2x, \\ u'v + u(v' + v \operatorname{tg} x) &= \sin 2x. \end{aligned} \quad (2.10)$$

б) Выберем функцию $v(x)$ как любое нетривиальное решение уравнения

$$v' + v \operatorname{tg} x = 0.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Решим его:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx} &= -v \operatorname{tg} x, & | \cdot dx \\ dv &= -v \operatorname{tg} x dx, & | \div v \\ \frac{dv}{v} &= -\operatorname{tg} x dx, \\ \int \frac{dv}{v} &= -\int \operatorname{tg} x dx, \\ \ln|v| &= \ln|\cos x| + C \end{aligned}$$

(интеграл в правой части мы вычисляли в примере 3 лекции 3). Поскольку мы ищем любое ненулевое частное решение, то, положив $C = 0$, получаем

$$\begin{aligned} \ln|v| &= \ln|\cos x|, \\ v &= \cos x. \end{aligned}$$

с) Подставим полученную функцию $v(x)$ в уравнение (2.10) и найдем $u(x)$:

$$\begin{aligned} u' \cos x &= \sin 2x = 2 \sin x \cos x, \\ u' &= 2 \sin x, \\ u &= \int 2 \sin x dx = -2 \cos x + C_1. \end{aligned}$$

д) Сделав обратную замену, имеем

$$\begin{aligned} z &= uv, \\ z &= (-2 \cos x + C_1) \cos x = -2 \cos^2 x + C_1 \cos x \end{aligned}$$

— общее решение уравнения (2.9).

2) Сделав обратную подстановку $z = y''$, получаем

$$y'' = -2 \cos^2 x + C_1 \cos x$$

— уравнение вида (2.6). Решим его:

$$\begin{aligned} y' &= \int (-2 \cos^2 x + C_1 \cos x) dx = \left| \cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2} \right| \\ &= \int (-\cos 2x - 1) dx + C_1 \int \cos x dx = -\frac{\sin 2x}{2} - x + C_1 \sin x + C_2, \\ y &= \int \left(-\frac{\sin 2x}{2} - x + C_1 \sin x + C_2 \right) dx \\ &= \frac{\cos 2x}{4} - \frac{x^2}{2} - C_1 \cos x + C_2 x + C_3 \end{aligned}$$

— общее решение уравнения (2.8).

Ответ: $y = \frac{\cos 2x}{4} - \frac{x^2}{2} - C_1 \cos x + C_2 x + C_3.$

Задачи для самостоятельного решения

2.2.1. $2xy'' = y'$, $y(1) = 2$, $y'(1) = 1$

2.2.2. $y''' = y''$

2.2.3. $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$, $y(-1) = 0$, $y'(-1) = -1$

2.2.4. $(1 + x^2)y'' + 2xy' = x^3$

2.2.5. $y'' = \frac{y'}{x} + x$

2.2.6. $x^3 y'' + x^2 y' = 1$

$$2.2.7. \quad xy''' + y'' - x - 1 = 0$$

Ответы к задачам для самостоятельного решения

$$2.2.1. \quad y = \frac{2\sqrt{x^3 + 4}}{3}$$

$$2.2.2. \quad y = C_1 e^x + C_2 x + C_3$$

$$2.2.3. \quad y = x e^{x+1} - e^{x+1} + 2$$

$$2.2.4. \quad y = \frac{x^3}{12} - \frac{x}{4} + C_1 \operatorname{arctg} x + C_2$$

$$2.2.5. \quad y = \frac{x^3}{3} + C_1 x^2 + C_2$$

$$2.2.6. \quad y = \frac{1}{x} + C_1 \ln |x| + C_2$$

$$2.2.7. \quad y = \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{2} + C_1(x \ln |x| - x) + C_2 x + C_3$$

2.3. Уравнения вида $F(y, y', y'') = 0$.

Пусть дано дифференциальное уравнение 2 порядка

$$F(y, y', y'') = 0. \quad (2.11)$$

Алгоритм решения:

1) Сделаем в уравнении (2.11) подстановку

$$y' = p(y),$$

где $p(y)$ — неизвестная функция от нового независимого переменного y , тогда по правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{dp(y)}{dy} p(y).$$

Подставляя эти соотношения в уравнение (2.11), получим

$$F\left(y, p, p \frac{dp}{dy}\right) = 0$$

— уравнение первого порядка относительно неизвестной функции $p(y)$. Найдем его общее решение

$$p = \varphi(y, C_1).$$

2) Сделав обратную подстановку, получим

$$y' = \varphi(y, C_1)$$

— уравнение первого порядка относительно $y(x)$.

Пример 8. Решить задачу Коши

$$y^3 y'' = 1, \quad y(-2) = 1, \quad y'(-2) = -1. \quad (2.12)$$

Решение:

1) Сделаем в уравнении подстановку

$$\begin{aligned} y' &= p, \\ y'' &= \frac{dp}{dy} p. \end{aligned}$$

Получим

$$y^3 p \frac{dp}{dy} = 1$$

— уравнение с разделяющимися переменными относительно неизвестной функции $p(y)$. Решим это уравнение:

$$\begin{aligned} y^3 p \frac{dp}{dy} &= 1, & | \cdot dy \\ y^3 p dp &= dy, & | \div y^3 \\ p dp &= \frac{dy}{y^3}, \\ \int p dp &= \int \frac{dy}{y^3}, \\ \frac{p^2}{2} &= -\frac{1}{2y^2} + C_1 = \frac{2C_1 y^2 - 1}{2y^2}, \\ p^2 &= \frac{2C_1 y^2 - 1}{y^2}. \end{aligned}$$

2) Сделав обратную подстановку $p = y'$ и выразив из полученного соотношения y' , имеем

$$\begin{aligned} (y')^2 &= \frac{2C_1 y^2 - 1}{y^2}, \\ y' &= \pm \sqrt{\frac{2C_1 y^2 - 1}{y^2}} = \pm \frac{\sqrt{2C_1 y^2 - 1}}{y}. \end{aligned}$$

Используя начальные условия $y = 1$, $y' = -1$, найдем значение константы C_1 и выберем знак:

$$-1 = \pm \frac{\sqrt{2C_1 - 1}}{1} \Rightarrow C_1 = 1,$$

и перед дробью следует выбрать знак “ $-$ ”. Итак, получаем

$$y' = -\frac{\sqrt{2y^2 - 1}}{y}$$

— уравнение первого порядка относительно $y(x)$. Это уравнение с разделяющимися переменными. Решим его:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\frac{\sqrt{2y^2-1}}{y}, & | \cdot dx \\ dy &= -\frac{\sqrt{2y^2-1}}{y} dx, & | \div \frac{\sqrt{2y^2-1}}{y} \\ \frac{ydy}{\sqrt{2y^2-1}} &= -dx \\ \int \frac{ydy}{\sqrt{2y^2-1}} &= -\int dx. \end{aligned}$$

Вычислим интеграл в левой части:

$$\begin{aligned} \int \frac{ydy}{\sqrt{2y^2-1}} &= \left| \begin{array}{l} t = 2y^2 - 1 \\ dt = (2y^2 - 1)' dy = 4ydy \\ ydy = \frac{dt}{4} \end{array} \right| \\ &= \int \frac{dt}{4\sqrt{t}} = \frac{\sqrt{t}}{2} + C = \frac{\sqrt{2y^2-1}}{2} + C. \end{aligned}$$

Итак, имеем

$$\frac{\sqrt{2y^2-1}}{2} = -x + C_2.$$

Теперь, подставляя начальное условие $y(-2) = 1$, найдем значение константы C_2 :

$$\frac{\sqrt{2-1}}{2} = 2 + C_2 \Rightarrow C_2 = -\frac{3}{2}.$$

Итак,

$$\frac{\sqrt{2y^2-1}}{2} = -x - \frac{3}{2}.$$

Выразим из полученного соотношения y :

$$\begin{aligned} \sqrt{2y^2-1} &= -2x - 3, \\ 2y^2 - 1 &= (2x + 3)^2, \\ y^2 &= \frac{(2x + 3)^2 + 1}{2}, \\ y &= \pm \sqrt{\frac{4x^2 + 12x + 10}{2}} = \pm \sqrt{2x^2 + 6x + 5}. \end{aligned}$$

В соответствии с начальным условием $y(-2) = 1$ перед корнем следует выбрать знак “+”. Значит,

$$y = \sqrt{2x^2 + 6x + 5}$$

— искомое частное решение уравнения (2.12).

Ответ: $y = \sqrt{2x^2 + 6x + 5}$.

Пример 9. Решить уравнение

$$yy'' = (y')^2 - (y')^3. \quad (2.13)$$

Решение:

1) Сделаем в уравнении подстановку

$$\begin{aligned} y' &= p, \\ y'' &= \frac{dp}{dy} p. \end{aligned}$$

Получим

$$\begin{aligned} yp \frac{dp}{dy} &= p^2 - p^3, \\ yp \frac{dp}{dy} &= p^2(1 - p) \end{aligned}$$

— уравнение с разделяющимися переменными относительно неизвестной функции $p(y)$. Решим это уравнение:

$$\begin{aligned} yp \frac{dp}{dy} &= p^2(1 - p), \quad | \cdot dy \\ yp dp &= p^2(1 - p)dy, \quad | \div yp^2(1 - p) \\ \frac{p dp}{p^2(1 - p)} &= \frac{dy}{y}, \\ \frac{dp}{p(1 - p)} &= \frac{dy}{y}, \\ \int \frac{dp}{p(1 - p)} &= \int \frac{dy}{y}. \end{aligned}$$

Вычислим интеграл в левой части. Подынтегральная функция - это правильная рациональная дробь. Сначала ее нужно разложить в сумму простейших дробей:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p(1 - p)} &= \frac{A}{p} + \frac{B}{(1 - p)} = \frac{A(1 - p) + Bp}{p(1 - p)}, \\ 1 &= A(1 - p) + Bp. \end{aligned}$$

Полученное равенство является тождественным, то есть оно выполняется при любом значении p . Пусть $p = 0$. Подставляя, получаем

$$1 = A(1 - 0) + B \cdot 0 \Rightarrow A = 1.$$

Пусть $p = 1$. Подставляя, получаем

$$1 = A(1 - 1) + B \cdot 1 \Rightarrow B = 1.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{p(1-p)} = \frac{1}{p} + \frac{1}{(1-p)},$$

$$\int \frac{dp}{p(1-p)} = \int \frac{dp}{p} + \int \frac{dp}{1-p}.$$

Далее,

$$\int \frac{dp}{1-p} = \left| \begin{array}{l} t = 1-p \\ dt = (1-p)' dp = -dp \\ dp = -dt \end{array} \right| = \int \frac{-dt}{t} = -\ln|t| + C = -\ln|1-p| + C.$$

Итак, имеем

$$\ln|p| - \ln|1-p| = \ln|y| + \ln|C_1|,$$

$$\ln \left| \frac{p}{1-p} \right| = \ln|C_1 y|,$$

$$\frac{p}{1-p} = C_1 y, \quad C_1 \neq 0.$$

Выразим из полученного равенства p :

$$\frac{p}{1-p} = C_1 y, \quad | \cdot (1-p)$$

$$p = C_1 y(1-p),$$

$$p = C_1 y - C_1 y p,$$

$$p + C_1 y p = C_1 y,$$

$$p(1 + C_1 y) = C_1 y, \quad | \div (1 + C_1 y)$$

$$p = \frac{C_1 y}{1 + C_1 y}.$$

2) Сделав обратную подстановку $p = y'$, получаем

$$y' = \frac{C_1 y}{1 + C_1 y}, \quad C_1 \neq 0$$

— уравнение первого порядка относительно $y(x)$. Это уравнение с разделяющимися переменными. Решим его:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C_1 y}{1 + C_1 y}, \quad | \cdot dx$$

$$dy = \frac{C_1 y}{1 + C_1 y} dx, \quad \left| \div \frac{y}{1 + C_1 y} \right.$$

$$\frac{1 + C_1 y}{y} dy = C_1 dx$$

$$\int \frac{1 + C_1 y}{y} dy = \int C_1 dx.$$

Далее,

$$\int \frac{1 + C_1 y}{y} dy = \int \frac{dy}{y} + \int C_1 dy = \ln |y| + C_1 y + C_2.$$

Итак, получаем

$$\ln |y| + C_1 y = C_1 x + C_2, \quad C_1 \neq 0 \quad (2.14)$$

— общий интеграл уравнения (2.13).

3) В процессе преобразований мы делили уравнение на $yp^2(1-p)$ и на $(C_1 y + 1)$. Значит, могли быть потеряны решения

$$\left. \begin{array}{l} y = 0, \\ C_1 y + 1 = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{C_1} \\ p = 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow y = C \end{array} \right\} \Leftrightarrow y = C$$

и

$$p = 1 \Rightarrow y' = 1 \Rightarrow y = x + C.$$

Непосредственной подстановкой в уравнение (2.13) убеждаемся, что эти функции являются его решениями. Решения $y = C$ (за исключением $y = 0$) можно включить в семейство (2.14), если снять ограничение $C_1 \neq 0$. Решения $y = x + C$ не входят в (2.14) ни при каких значениях констант C_1 и C_2 .

Ответ: $\ln |y| + C_1 y = C_1 x + C_2, \quad y = x + C, \quad y = 0.$

Задачи для самостоятельного решения

- 2.3.1. $y(1 - \ln y)y'' + (1 + \ln y)(y')^2 = 0$
 2.3.2. $2yy'' = 1 + (y')^2$
 2.3.3. $y^2 y'' - (y')^3 = 0$
 2.3.4. $2yy'' = (y')^2, \quad y(-1) = 4, \quad y'(-1) = 1$
 2.3.5. $y'' - (y')^2 + y'(y - 1) = 0, \quad y(0) = y'(0) = 2$
 2.3.6. $2yy'' + y^2 - (y')^2 = 0, \quad y(0) = y'(0) = 1$

Ответы к задачам для самостоятельного решения

- 2.3.1. $\ln y = 1 - \frac{1}{C_1 x + C_2}$
 2.3.2. $4(C_1 y - 1) = (C_1 x + C_2)^2$
 2.3.3. $\ln |y| + C_1 y = x + C_2, \quad y = C$
 2.3.4. $y = \frac{(x+9)^2}{16}$
 2.3.5. $y = 2e^x$
 2.3.6. $y = \sin x + 1$