

Основные тригонометрические формулы

1. Основные формулы:

$$1) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$2) \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$$

$$3) \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \alpha \neq \pi k, k \in Z$$

$$4) 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$$

$$5) 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \alpha \neq \pi k, k \in Z$$

2. Формулы сложения

$$1) \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$2) \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$3) \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$4) \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$5) \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

$$6) \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

$$7) \operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha}$$

$$8) \operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \alpha}$$

3. Формулы двойного угла

$$1) \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$2) \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$3) \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$4) \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$5) \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$$

$$6) \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}, \alpha \neq \pi k, k \in Z$$

4. Формулы понижения степени

1) $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$

2) $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$

5. Дополнительные формулы

1) $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + \sin 2\alpha$

2) $1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha$

3) $1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$

4) $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$

6. Формулы преобразования суммы в произведение

1) $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$

2) $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha-\beta}{2}$

3) $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$

4) $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha+\beta}{2}$

5) $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$

6) $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$

7) $\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$

8) $\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = \frac{-\sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$

7. Формулы преобразования произведения в сумму

1) $\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$

2) $\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$

3) $\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$

8. Формулы тройного угла

1) $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$

2) $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$

3) $\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha} = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right) \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right), \alpha \neq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$

$$4) \operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{ctg}^2 \alpha}, \alpha \neq \frac{\pi n}{3}$$

9. Формулы понижения степени для кубов

$$1) \sin^3 \alpha = \frac{1}{4} (3 \sin \alpha - \sin 3\alpha)$$

$$2) \cos^3 \alpha = \frac{1}{4} (3 \cos \alpha + \cos 3\alpha)$$

10. Универсальная подстановка

$$1) \cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \alpha \neq \pi + 2\pi k$$

$$2) \sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \alpha \neq \pi + 2\pi k$$